

Diplomarbeit:
über die Anzahlfunktion $\pi(x)$

vorgelegt von
Mohamed NAJI

Juli 1999

Fachbereich Mathematik
AG Zahlentheorie und Analysis
Betreuer: Prof. Dr. Wolfgang Schwarz

Erklärung

Hiermit erkläre ich, die vorliegende Diplomarbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet zu haben.

Frankfurt am Main, im Juli 1999

Mohamed NAJI

Danksagung und Widmung

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen Personen, die mich bei der Erstellung dieser Arbeit auf verschiedene Art und Weise unterstützt haben, bedanken. Besonderer Dank gebührt vor allem Prof. Dr. Wolfgang Schwarz, der das Thema vorgeschlagen hat und dabei mich fachlich betreut hat.

Zitat

If you ask mathematicians what they do, you always get the same answer; they think. They are trying to solve difficult and novel problems. (They never think about ordinary problems—they just write down the answers.)

M. Evgrafov

Literaturnaya Gazeta, no. 49 (1979) 12.

Inhaltsverzeichnis

Erklärung	I
Danksagung und Widmung	II
Zitat	III
Inhaltsverzeichnis	IV
Abbildungsverzeichnis	VI
Tabellenverzeichnis	X
Listings	XI
1 Historische Einführung	1
1.1 Vorwort	1
1.2 Der Primzahlsatz im Laufe der Geschichte	2
1.3 Größenordnung des Fehlergliedes $\pi(x) - li(x)$	13
1.4 Vorzeichen (Signum) des Fehlergliedes $\pi(x) - li(x)$	16
1.5 Sonstiges	17
1.6 Gliederung der Arbeit	17
2 Grundlagen	20
3 Einige Eigenschaften der Zetafunktion	28

4	Ein ”‘klassischer’” analytischer Beweis des Primzahlsatzes	43
5	Eine Idee von Wolke zum Beweis des Primzahlsatzes	65
6	Ein Beweis des Primzahlsatzes nach Newman	71
7	Numerische Berechnung von $\pi(x)$	74
7.1	LEGENDRE-Methode	75
7.2	MEISSEL-Methode	78
7.3	LEHMER-Methode	94
7.4	Anmerkungen	101
8	Numerische Überprüfung des Primzahlsatzes	103
	Zusammenfassung	108
	Schlusswort	111
A	Symbolverzeichnis	113
B	datenMatLab: $R(x)$; $li(x)$; $\frac{x}{\log(x)}$ und $\pi(x)$	117
C	Listing der MatLab M-Files	135
D	Diagramme: $R(x) - \pi(x)$; $li(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$	190
E	Diagramme: $R(x) - \pi(x)$ und $li(x) - \pi(x)$	209
F	Diagramme: $R(x) - \pi(x)$; $li(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$	228
	Literaturverzeichnis	247
	Namensverzeichnis	256
	Stichwortverzeichnis	260

Abbildungsverzeichnis

1.1	Chronologische Tabelle	18
2.1	Illustration einer komplexen Funktion	22
2.2	Illustration der CAUCHYschen Integralformel: Punkt z inner- halb K	26
2.3	Illustration der CAUCHYschen Integralformel: Punkt z außer- halb K	27
4.1	Illustration des Integrationsweges	44
5.1	Illustration des Integrationsweges	67
D.1	Graphen von $R(x) - \pi(x)$; $li(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ für $10^1 \leq x \leq 10^2$	191
D.2	Graphen von $R(x) - \pi(x)$; $li(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ für $10^2 \leq x \leq 10^3$	192
D.3	Graphen von $R(x) - \pi(x)$; $li(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ für $10^3 \leq x \leq 10^4$	193
D.4	Graphen von $R(x) - \pi(x)$; $li(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ für $10^4 \leq x \leq 10^5$	194
D.5	Graphen von $R(x) - \pi(x)$; $li(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ für $10^5 \leq x \leq 10^6$	195
D.6	Graphen von $R(x) - \pi(x)$; $li(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ für $10^6 \leq x \leq 10^7$	196

D.7	Graphen von $R(x) - \pi(x)$; $li(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ für $10^7 \leq x \leq 10^8$	197
D.8	Graphen von $R(x) - \pi(x)$; $li(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ für $10^8 \leq x \leq 10^9$	198
D.9	Graphen von $R(x) - \pi(x)$; $li(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ für $10^9 \leq x \leq 10^{10}$	199
D.10	Graphen von $R(x) - \pi(x)$; $li(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ für $10^{10} \leq x \leq 10^{11}$	200
D.11	Graphen von $R(x) - \pi(x)$; $li(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ für $10^{11} \leq x \leq 10^{12}$	201
D.12	Graphen von $R(x) - \pi(x)$; $li(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ für $10^{12} \leq x \leq 10^{13}$	202
D.13	Graphen von $R(x) - \pi(x)$; $li(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ für $10^{13} \leq x \leq 10^{14}$	203
D.14	Graphen von $R(x) - \pi(x)$; $li(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ für $10^{14} \leq x \leq 10^{15}$	204
D.15	Graphen von $R(x) - \pi(x)$; $li(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ für $10^{15} \leq x \leq 10^{16}$	205
D.16	Graphen von $R(x) - \pi(x)$; $li(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ für $10^{16} \leq x \leq 10^{17}$	206
D.17	Graphen von $R(x) - \pi(x)$; $li(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ für $10^{17} \leq x \leq 10^{18}$	207
D.18	GesamtGraphen von $R(x) - \pi(x)$; $li(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ für $10^1 \leq x \leq 10^{18}$	208
E.1	Graphen von $R(x) - \pi(x)$ und $li(x) - \pi(x)$ für $10^1 \leq x \leq 10^2$	210
E.2	Graphen von $R(x) - \pi(x)$ und $li(x) - \pi(x)$ für $10^2 \leq x \leq 10^3$	211
E.3	Graphen von $R(x) - \pi(x)$ und $li(x) - \pi(x)$ für $10^3 \leq x \leq 10^4$	212
E.4	Graphen von $R(x) - \pi(x)$ und $li(x) - \pi(x)$ für $10^4 \leq x \leq 10^5$	213
E.5	Graphen von $R(x) - \pi(x)$ und $li(x) - \pi(x)$ für $10^5 \leq x \leq 10^6$	214

E.6	Graphen von $R(x) - \pi(x)$ und $li(x) - \pi(x)$ für $10^6 \leq x \leq 10^7$	215
E.7	Graphen von $R(x) - \pi(x)$ und $li(x) - \pi(x)$ für $10^7 \leq x \leq 10^8$	216
E.8	Graphen von $R(x) - \pi(x)$ und $li(x) - \pi(x)$ für $10^8 \leq x \leq 10^9$	217
E.9	Graphen von $R(x) - \pi(x)$ und $li(x) - \pi(x)$ für $10^9 \leq x \leq 10^{10}$	218
E.10	Graphen von $R(x) - \pi(x)$ und $li(x) - \pi(x)$ für $10^{10} \leq x \leq 10^{11}$	219
E.11	Graphen von $R(x) - \pi(x)$ und $li(x) - \pi(x)$ für $10^{11} \leq x \leq 10^{12}$	220
E.12	Graphen von $R(x) - \pi(x)$ und $li(x) - \pi(x)$ für $10^{12} \leq x \leq 10^{13}$	221
E.13	Graphen von $R(x) - \pi(x)$ und $li(x) - \pi(x)$ für $10^{13} \leq x \leq 10^{14}$	222
E.14	Graphen von $R(x) - \pi(x)$ und $li(x) - \pi(x)$ für $10^{14} \leq x \leq 10^{15}$	223
E.15	Graphen von $R(x) - \pi(x)$ und $li(x) - \pi(x)$ für $10^{15} \leq x \leq 10^{16}$	224
E.16	Graphen von $R(x) - \pi(x)$ und $li(x) - \pi(x)$ für $10^{16} \leq x \leq 10^{17}$	225
E.17	Graphen von $R(x) - \pi(x)$ und $li(x) - \pi(x)$ für $10^{17} \leq x \leq 10^{18}$	226
E.18	GesamtGraphen von $R(x) - \pi(x)$ und $li(x) - \pi(x)$ für $10^1 \leq$ $x \leq 10^{18}$	227
F.1	Graphen von $R(x) - \pi(x)$; $li(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ für $10^1 \leq x \leq 10^2$	229
F.2	Graphen von $R(x) - \pi(x)$; $li(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ für $10^2 \leq x \leq 10^3$	230
F.3	Graphen von $R(x) - \pi(x)$; $li(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ für $10^3 \leq x \leq 10^4$	231
F.4	Graphen von $R(x) - \pi(x)$; $li(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ für $10^4 \leq x \leq 10^5$	232
F.5	Graphen von $R(x) - \pi(x)$; $li(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ für $10^5 \leq x \leq 10^6$	233
F.6	Graphen von $R(x) - \pi(x)$; $li(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ für $10^6 \leq x \leq 10^7$	234
F.7	Graphen von $R(x) - \pi(x)$; $li(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ für $10^7 \leq x \leq 10^8$	235

F.8	Graphen von $R(x) - \pi(x)$; $li(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ für $10^8 \leq x \leq 10^9$	236
F.9	Graphen von $R(x) - \pi(x)$; $li(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ für $10^9 \leq x \leq 10^{10}$	237
F.10	Graphen von $R(x) - \pi(x)$; $li(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ für $10^{10} \leq x \leq 10^{11}$	238
F.11	Graphen von $R(x) - \pi(x)$; $li(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ für $10^{11} \leq x \leq 10^{12}$	239
F.12	Graphen von $R(x) - \pi(x)$; $li(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ für $10^{12} \leq x \leq 10^{13}$	240
F.13	Graphen von $R(x) - \pi(x)$; $li(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ für $10^{13} \leq x \leq 10^{14}$	241
F.14	Graphen von $R(x) - \pi(x)$; $li(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ für $10^{14} \leq x \leq 10^{15}$	242
F.15	Graphen von $R(x) - \pi(x)$; $li(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ für $10^{15} \leq x \leq 10^{16}$	243
F.16	Graphen von $R(x) - \pi(x)$; $li(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ für $10^{16} \leq x \leq 10^{17}$	244
F.17	Graphen von $R(x) - \pi(x)$; $li(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ für $10^{17} \leq x \leq 10^{18}$	245
F.18	GesamtGraphen von $R(x) - \pi(x)$; $li(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ für $10^1 \leq x \leq 10^{18}$	246

Tabellenverzeichnis

7.1	Einige Verfahren zur Berechnung von $\pi(x)$ im Vergleich . . .	102
A.1	Notationen	116
B.1	datenMatLab01.mat ($10 \leq x \leq 10^2$)	118
B.2	datenMatLab02.mat ($10^2 \leq x \leq 10^3$)	119
B.3	datenMatLab03.mat ($10^3 \leq x \leq 10^4$)	120
B.4	datenMatLab04.mat ($10^4 \leq x \leq 10^5$)	121
B.5	datenMatLab05.mat ($10^5 \leq x \leq 10^6$)	122
B.6	datenMatLab06.mat ($10^6 \leq x \leq 10^7$)	123
B.7	datenMatLab07.mat ($10^7 \leq x \leq 10^8$)	124
B.8	datenMatLab08.mat ($10^8 \leq x \leq 10^9$)	125
B.9	datenMatLab09.mat ($10^9 \leq x \leq 10^{10}$)	126
B.10	datenMatLab10.mat ($10^{10} \leq x \leq 10^{11}$)	127
B.11	datenMatLab11.mat ($10^{11} \leq x \leq 10^{12}$)	128
B.12	datenMatLab12.mat ($10^{12} \leq x \leq 10^{13}$)	129
B.13	datenMatLab13.mat ($10^{13} \leq x \leq 10^{14}$)	130
B.14	datenMatLab14.mat ($10^{14} \leq x \leq 10^{15}$)	131
B.15	datenMatLab15.mat ($10^{15} \leq x \leq 10^{16}$)	132
B.16	datenMatLab16.mat ($10^{16} \leq x \leq 10^{17}$)	133
B.17	datenMatLab17.mat ($10^{17} \leq x \leq 10^{18}$)	134

Listings

C.1	TwoAxes01.m	135
C.2	TwoAxes02.m	137
C.3	TwoAxes03.m	138
C.4	TwoAxes04.m	139
C.5	TwoAxes05.m	140
C.6	TwoAxes06.m	141
C.7	TwoAxes07.m	142
C.8	TwoAxes08.m	143
C.9	TwoAxes09.m	144
C.10	TwoAxes10.m	145
C.11	TwoAxes11.m	146
C.12	TwoAxes12.m	147
C.13	TwoAxes13.m	148
C.14	TwoAxes14.m	149
C.15	TwoAxes15.m	150
C.16	TwoAxes16.m	151
C.17	TwoAxes17.m	152
C.18	TwoAxes00.m	153
C.19	Twodiagramm01.m	154
C.20	Twodiagramm02.m	155
C.21	Twodiagramm03.m	156
C.22	Twodiagramm04.m	157

C.23 Twodiagramm05.m	158
C.24 Twodiagramm06.m	159
C.25 Twodiagramm07.m	160
C.26 Twodiagramm08.m	161
C.27 Twodiagramm09.m	162
C.28 Twodiagramm10.m	163
C.29 Twodiagramm11.m	164
C.30 Twodiagramm12.m	165
C.31 Twodiagramm13.m	166
C.32 Twodiagramm14.m	167
C.33 Twodiagramm15.m	168
C.34 Twodiagramm16.m	169
C.35 Twodiagramm17.m	170
C.36 Twodiagramm00.m	171
C.37 Threediagramm01.m	172
C.38 Threediagramm02.m	173
C.39 Threediagramm03.m	174
C.40 Threediagramm04.m	175
C.41 Threediagramm05.m	176
C.42 Threediagramm06.m	177
C.43 Threediagramm07.m	178
C.44 Threediagramm08.m	179
C.45 Threediagramm09.m	180
C.46 Threediagramm10.m	181
C.47 Threediagramm11.m	182
C.48 Threediagramm12.m	183
C.49 Threediagramm13.m	184
C.50 Threediagramm14.m	185
C.51 Threediagramm15.m	186

C.52 Threedigramm16.m	187
C.53 Threedigramm17.m	188
C.54 Threedigramm00.m	189

Kapitel 1

Historische Einführung

1.1 Vorwort

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit der Anzahlfunktion $\pi(x)$, die als die Anzahl aller Primzahlen $\leq x$ definiert ist. Im ersten Teil dieser Arbeit betrachten wir einige bekannte Beweise des Primzahlsatzes. In dieser (historischen) Einführung stellen wir einige Ideen zum Beweis des Primzahlsatzes in chronologischer Reihenfolge zusammen. Dies vermittelt gleichzeitig einen groben Überblick über die verschiedenen Methoden und Hilfsmittel, die im Laufe der Zeit entwickelt wurden. Für die benötigten Begriffe und Tatsachen aus der Zahlentheorie verweisen wir auf die Literatur wie etwa [9]. Von entscheidender Bedeutung ist die Verwendung der LANDAU¹schen Symbole o , O und \sim , welche wie folgt definiert werden können:

$$f(x) = O(g(x)) \quad :\Leftrightarrow \quad \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \infty \quad (1.1)$$

$$f(x) = o(g(x)) \quad :\Leftrightarrow \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = 0 \quad (1.2)$$

$$f(x) \sim g(x) \quad :\Leftrightarrow \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = 1 \quad (1.3)$$

¹Die Lebensdaten von LANDAU und viele andere in dieser Arbeit erwähnten Mathematiker findet man am Ende der Arbeit.

Es ist durchaus üblich, auch andere Grenzübergänge mit LANDAUSchen Symbolen zu beschreiben, dies wird jedoch in der vorliegenden Arbeit nicht der Fall sein. Alle anderen betrachteten Symbole werden an entsprechender Stelle erklärt. Ferner verweisen wir auf das Symbolverzeichnis im Anhang A ab Seite 113.

Eine natürliche Zahl heißt Primzahl (hier meistens mit p bezeichnet), wenn sie genau zwei verschiedene² positive Teiler hat.

1.2 Der Primzahlsatz im Laufe der Geschichte

Schon EUKLID [20, Seite 388–392] (vgl. auch [34, Seite 3]) hat bewiesen, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Unter der Annahme, dass die Menge der Primzahlen $\mathbb{P} = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ mit $p_1 = 2 < p_2 = 3 < \dots < p_k$ endlich sei, zeigte EUKLID, dass für den kleinsten Primteiler $p(n)$ der natürlichen Zahl³

$$n := 1 + \underbrace{\prod_{j=1}^k p_j}_{:=p_k} \quad (1.4)$$

gilt $p(n) \notin \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$, im Widerspruch zu $p(n) \in \mathbb{P}$. Damit scheint es so, als ob weitere Anzahlfragen zu den Primzahlen sich erübrigen. Tatsächlich wurde fast 2000 Jahre nichts mehr über die Verteilung der Primzahlen gefunden, ja noch nicht einmal vermutet. Das ändert sich erst, als im Jahre 1737 EULER einen völlig neuen⁴ Beweis für die Unendlichkeit der Menge der Primzahlen veröffentlichte. Eine Generation vor ihm wurde

²Nach dieser Definition ist 1 keine Primzahl.

³24029 $\$$ +1 ist prim; dies wurde von CALDWELL [10] entdeckt und galt (wahrscheinlich heute noch) als die größte bekannte Primzahl von der Form $p\$\mathbb{N}+1$. [57, Seite 16]

⁴Heute kennt man zahlreiche Beweise für die Unendlichkeit der Menge der Primzahlen [56, Chapter 1].

bewiesen, dass die harmonische Reihe, das ist die Summe aller reziproken natürlichen Zahlen $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n}$, über alle Grenzen wächst, das heißt divergiert. Der EULERSche Beweis verläuft folgendermaßen: Angenommen, es gäbe nur die endlich vielen Primzahlen p_1, p_2, \dots, p_k . Man bilde das Produkt

$$\prod_{j=1}^k \frac{1}{1 - \frac{1}{p_j}} = \prod_{j=1}^k \left(1 + \frac{1}{p_j} + \left(\frac{1}{p_j}\right)^2 + \left(\frac{1}{p_j}\right)^3 + \dots \right) \quad (1.5)$$

und multipliziere die Klammern aus. Aufgrund der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung der natürlichen Zahlen ergibt sich dann für jedes $n \in \mathbb{N}$ der Summand $\frac{1}{n}$ genau einmal. Es ist also

$$\prod_{j=1}^k \frac{1}{1 - \frac{1}{p_j}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad (1.6)$$

Dies ist aber nicht möglich, da die harmonische Reihe divergiert. Daraus folgerte EULER: Es gibt unendlich viele Primzahlen. Er hatte damit zwei auf den ersten Blick völlig verschiedene Gebiete zusammengeführt, die Analysis und die Zahlentheorie. Der EULERSche Beweis hat gegenüber dem einfacheren EUKLIDSchen den Vorteil, dass er quantitative Aussagen erlaubt. Dies liest sich bei EULER [21] (vgl. [62]) so:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \dots = \log \log \infty \quad (1.7)$$

In heutiger Schreibweise

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} \sim \log(\log(x)) \quad (1.8)$$

Mit einem Mal schien es wieder sinnvoll, nach der genaueren Verteilung der Primzahlen zu fragen, worüber EULER noch verzweifelte: „Die Mathemati-

ker haben sich bis jetzt vergeblich bemüht, irgendeine Ordnung in der Folge der Primzahlen zu entdecken, und man ist geneigt zu glauben, dies sei ein Geheimnis, das der menschliche Geist niemals durchdringen wird. Um sich davon zu überzeugen, braucht man nur einen Blick auf die Primzahltabellen zu werfen, wobei sich einige die Mühe gemacht haben, diese bis über 10000 hinaus fortzusetzen, und man wird zunächst bemerken, dass dort weder eine Ordnung herrscht noch eine Regel zu beobachten ist. “[17, Seite 279]

Es gab aber Forscher, die sich von dem vermeintlichen Chaos nicht schrecken ließen. Zu diesen tapferen Wahrheitssuchern gehörten LEGENDRE und GAUSS. LEGENDRE definierte als erster die Anzahlfunktion folgendermaßen:

$$\pi(x) := \text{Anzahl aller Primzahlen} \leq x, (x \in \mathbb{R}) \quad (1.9)$$

Erst das gewissenhafte Auszählen immer umfangreicherer Primzahltafeln⁵ führte unabhängig voneinander LEGENDRE und GAUSS zu Vermutungen, die beide nach geeigneter Interpretation⁶ zur asymptotischen Gleichheit (Primzahlsatz):

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log(x)} \quad (1.10)$$

äquivalent⁷ sind.

⁵LAMBERT veröffentlichte im Jahre 1770 eine Primzahltafel für $p < 102\,000$; VEGA (1797) für $p < 400\,031$; CHERNAC (1811) für $p < 1020\,000$; und BURCKHARDT (1816/7) für $p < 3036\,000$ [56, Seite 175] und [57, Seite 233].

⁶Dazu später mehr.

⁷Dabei ist zu beachten, dass für $L > 3$ auf dem beliebig großen Intervall $I_L := [L!+2, L!+L]$ die Funktion $\pi(x)$ konstant ist, aber $\frac{x}{\log(x)}$ monoton wachsend ist. Ein solches

LEGENDRE verglich die aus den Tafeln von VEGA, CERNAC und BURCKHARDT ermittelten Werte von $\pi(x)$ für $x \leq 10^6$ mit der Funktion

$$\lambda(x) := \frac{x}{\log(x) - B}; \text{ wobei } \lim_{x \rightarrow \infty} B(x) = 1,083\,66\dots \quad (1.11)$$

und fand im betrachteten Bereich eine sehr gute Übereinstimmung⁸. Im Jahre 1808 äußerte er sich folgendermaßen: ”‘Quoique la suite des nombres premiers soit extrêmement irrégulière, on peut cependant trouver avec une précision très satisfaisante, combien il y a de ces nombres depuis 1 jusqu’à une limite donnée x . La formule qui résout la question est $y = \frac{x}{\log(x) - 1,08366}$, $\log(x)$ étant un logarithme hyperbolique.’” [35, Band 2, Seite 65]

LEGENDRE vermutete also, dass die Funktion $B(x)$, welche man durch die Gleichung

$$\pi(x) := \frac{x}{\log(x) - B} \quad (1.12)$$

definieren kann, für $x \rightarrow \infty$ gegen einen Grenzwert konvergiert, dessen erste Dezimalen mit 1,083 66 übereinstimmen. Das besagt insbesondere wegen

$$\frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log(x)}} = \frac{\pi(x) \log(x)}{x} = \frac{1}{1 - \frac{B(x)}{\log(x)}} \quad (1.13)$$

dass

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log(x)}. \quad (1.14)$$

Intervall I_L der Größe 778 ist erst für $L=778$, d. h. $L! + 2 > 10^{1900}$ zu bekommen. Doch haben YOUNG und POTLER [50] gezeigt, dass bereits die Primzahl 42842283925351 von 778 zusammengesetzten Zahlen gefolgt wird.

⁸Dabei ist zu beachten, dass TSCHEBYSCHEW (vgl. [34, Seite 17]) zeigte, dass die LEGENDRE’s Approximation falsch ist. TSCHEBYSCHEW’s Beweis war allerdings relativ kompliziert. Einen anderen einfacheren Beweis lieferte PINTZ [49].

Auf GAUSS geht der folgender Gedanke zurück: Wenn der Primzahlsatz (1.10) gilt, dann ist die ”‘Wachstumsrate’” der Primzahlen ziemlich genau $\frac{1}{\log(x)}$, denn

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x}{\log(x)} \right) = \frac{\log(x) - 1}{\log^2(x)} \sim \frac{1}{\log(x)} \quad (1.15)$$

folglich ist dann

$$li(x) := \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \left(\int_{u=0}^{u=1-\varepsilon} \frac{du}{\log(u)} + \int_{u=1+\varepsilon}^{u=x} \frac{du}{\log(u)} \right) \quad (1.16)$$

Dabei steht ”‘li’” für den Integrallogarithmus. (Beachte, dass $\int_{u=0}^{u=x} \frac{du}{\log(u)}$ sinnlos ist [34, Seite 27]). Diese Approximation ist für $x < 10^7$ fast so gut wie die von LEGENDRE, für größere x ist sie unvergleichlich besser.

Mit partieller Integration ergibt sich für $x > 1$

$$li(x) - li(2) = \int_2^x 1 \cdot \frac{1}{\log(u)} du \quad (1.17)$$

$$= \frac{x}{\log(x)} - \frac{2}{\log(2)} + \int_2^x \frac{du}{\log^2(u)} \quad (1.18)$$

und daraus

$$\frac{li(x)}{\frac{x}{\log(x)}} = 1 + \left(li(2) - \frac{2}{\log(2)} \right) \frac{\log(x)}{x} + \frac{\log(x)}{x} \int_2^x \frac{du}{\log^2(u)} \quad (1.19)$$

was zu⁹

$$li(x) \sim \frac{x}{\log(x)} \quad (1.20)$$

⁹Dies werden wir ausführlich am Ende von Kapitel 4 beweisen.

führt.

Wenn (1.10) bewiesen ist, ist $\pi(x) \sim \lambda(x)$ bzw. $\pi(x) \sim \text{li}(x)$ gezeigt; in dem hier präzisierten Sinne sind dann die Vermutungen von LEGENDRE bzw. GAUSS bestätigt, dass $\lambda(x)$ bzw. $\text{li}(x)$ die Funktion $\pi(x)$ gut annähern.

Wenn man eine Tafel der Primzahlen bis N hat, kann man $\pi(x)$ für alle $x \leq N$ unmittelbar durch Auszählen ermitteln. Tatsächlich hat GAUSS genau auf diesem Wege aus den Tafeln von LAMBERT und VEGA seine obige (richtige) Vermutung (1.16) verifiziert. In seiner Besprechung der neu erschienenen Primzahltafeln von CHERNAC äußerte GAUSS sich dann auch begeistert: "...Wie schätzbar ein solches der Arithmetik gemachtes Geschenk sei, beurtheilt ein Jeder leicht, der viel mit grössern Zahlenrechnungen zu thun hat. Der Verf. verdient doppelten Dank, sowohl für seine höchst mühsame Arbeit selbst,..., als für den gewiss sehr erheblichen auf den Druck gemachten Aufwand, wofür sich sonst schwerlich ein Verleger gefunden haben möchte. ... Die erste Million ist nun für Jedermanns Gebrauch da; und wer Gelegenheit und Eifer für diesen Gegenstand hat, möge daher seine Mühe auf das Weitere richten." [9, Seiten 287–288]

Die GAUSSsche Vermutung (1.16) hat den Vorzug, dass der Primzahlsatz die folgende heuristisch–anschauliche Interpretation bekommt: $\frac{1}{\log(n)}$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass n eine Primzahl ist. Aber weder GAUSS noch LEGENDRE konnte seine Vermutung beweisen.

Erst TSCHEBYSCHEW [11] gelang um 1850 ein erstes Ergebnis in diese Richtung. Er konnte mit elementaren Methoden (d. h. die bis dahin nur wenig entwickelte Theorie der analytischen Funktionen nicht benützenden) zeigen¹⁰, dass für genügend große $x \in \mathbb{R}$ gilt:

¹⁰TSCHEBYSCHEW hat erstmals das BERTRANDSches Postulat bewiesen: BERTRAND stellte anhand einer Primzahltafel bis 6000000 fest, dass sich zwischen n und $2n$ stets eine Primzahl befand. Seine Vermutung, dass dies allgemein gelte, nannte man BERTRANDSches Postulat.

$$A \frac{x}{\log(x)} \leq \pi(x) \leq B \frac{x}{\log(x)} \quad (1.21)$$

$$\text{wobei } A = \frac{2^{\frac{1}{2}} 3^{\frac{1}{3}} 5^{\frac{1}{5}}}{30^{\frac{1}{30}}} = 0,921\,29\dots \quad (1.22)$$

$$\text{und } B = \frac{6}{5}A = 1,105\,55\dots \quad (1.23)$$

Außerdem bewies er: Wenn der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log(x)}}$ existiert, so muss dieser gleich 1 sein. Mit TSCHEBYSCHEW's Originalmethoden, aber viel größerem numerischen Aufwand konnte SYLVESTER [75] die Faktoren 0,921 29... bzw. 1,105 55... auf 0,956 95... bzw. 1,044 23... verschärfen. Interessant ist was SYLVESTER einmal über den (vermuteten) Primzahlsatz sagte: "...But to pronounce with certainty upon the existence of such possibility, we shall probably have to wait until some one is born¹¹ into the world as far surpassing TSCHEBYSCHEW in insight and penetration as TSCHEBYSCHEW has proved himself superior in these qualities to the ordinary run of mankind." [75, Seite 247] Ein Beweis des Primzahlsatzes kam auf diesem Wege nicht zustande. RIEMANN [59] zeigte, dass man die Zetafunktion:

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \quad (1.24)$$

$$\text{wobei } s = \sigma + it \in \mathbb{C} \text{ mit } \operatorname{Re}(s) > 1 \quad (1.25)$$

$$\text{und } n^{-s} := \exp(s \cdot \log(n)) \quad (1.26)$$

auf die ganze komplexe Ebene analytisch fortsetzen kann zu einer Funktion,

¹¹Als SYLVESTER diese Zeilen schrieb, waren HADAMARD und DE LA VALLÉE POUSSIN schon geboren. Diesen gelang es, das Ziel zu erreichen, und zwar auf dem Wege, welchen schon lange zuvor zu verwandten, aber anderen Zwecken RIEMANN betreten hatten.

die für $s \neq 1$ holomorph ist und in $s=1$ einen einfachen Pol mit Residuum 1 hat. Dabei gilt nach RIEMANN die Funktionalgleichung:

$$\zeta(1-s) = (2\pi)^{-s} \cos\left(\frac{\pi}{2}s\right) \Gamma(s) \zeta(s) \quad (1.27)$$

wobei

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} u^{s-1} \exp(-u) du \quad (1.28)$$

die Gammafunktion bezeichnet. Der Gleichung (1.27) entnimmt man auf Grund der bekannten Pole der Gamma-Funktion, dass $\zeta(s)$ im Gebiet $\operatorname{Re}(s) < 0$ einfache Nullstellen für $s=-2, -4, \dots$ hat. RIEMANN vermutete, dass $\zeta(s)$ im ”kritischen Streifen” $0 \leq \operatorname{Re}(s) \leq 1$ unendlich viele Nullstellen hat und dass diese Nullstellen alle auf der Geraden $\operatorname{Re}(s) = \frac{1}{2}$ liegen. Diese berühmte RIEMANNSche Vermutung¹² konnte bis heute nicht bewiesen werden. Ferner schlug RIEMANN 1859 in seiner berühmt gewordenen Arbeit [59] vor, das genaue Verhalten der Funktion $\pi(x)$ für große x durch analytische Eigenschaften der komplexen Zeta-Funktion zu studieren¹³. RIEMANN

¹²Heute vermutet man zusätzlich, dass diese Nullstellen sämtlich einfach sind. Diese Vermutung wird durch immer weiter gehende Computer-gestützte Rechnungen nahegelegt. VAN DE LUNE, TE RIELE und WINTER [85] haben gezeigt, dass die ersten 1500000001 nichttrivialen Nullstellen der Zetafunktion alle einfach sind. Nach deren Berechnungen mit einem Superrechner liegen alle Nullstellen $\sigma + it$ der Zetafunktion mit $0 < t < 545\,439\,823,215$ auf der Geraden $\operatorname{Re}(s) = \frac{1}{2}$ und sind einfach. [56, Seite 182] und [57, Seite 241]. Dabei ist zu beachten, dass die MERTENSSche Vermutung, die stärker als die RIEMANNSche Vermutung (d.h. sie impliziert die RIEMANNSche Vermutung, ohne selbst aus dieser hergeleitet werden zu können), erst 1985 von ODLYZKO und TE RIELE [58] widerlegt wurde. Erwähnenswert, dass schon JURKAT und PEYERIMHOFF [47] einer Widerlegung der MERTENSSchen Vermutung sehr nahe kamen.

¹³Es ist nicht sehr erstaunlich, dass man von den Eigenschaften der Zeta-Funktion auf Eigenschaften der Primzahlen schließen kann. Denn es stecken grob gesprochen in $\zeta(s)$ alle Primzahlen drinnen, und die Werte von $\zeta(s)$ in irgendeinem der unendlich vielen Punkte der s -Ebene liefern eine Aussage über die (unendlich vielen) Primzahlen.

zu Ehren trägt die Zetafunktion seinen Namen. Doch die Geschichte der Zetafunktion begann rund 125 Jahre vor RIEMANN: Sowohl MENGOLI (Novea quadraturea arithmeticae, Bologna, 1650) als auch WALLIS (Arithmetica infinitorum, Oxford, 1655) hatten das Problem gestellt, den Wert der Reihe $\sum_{n \geq 1} n^{-2}$ (also $\zeta(2)$) zu berechnen. LEIBNIZ ebenso wie die älteren BERNOULLI-Brüder konnten ab 1670 nur Näherungswerte angeben, die später von BERNOULLI¹⁴ und GOLDBACH (1728), STIRLING (1730) und EULER (1731) sukzessive verbessert wurden. 1734 gelang dann EULER der Nachweis von

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad (1.29)$$

allgemeiner von

$$\zeta(2j) = (-1)^{j-1} \frac{2^{2j-1}}{(2j)!} B_{2j} \pi^{2j} \quad (1.30)$$

für alle $j \in \mathbb{N}$ mit den (rationalen) BERNOULLI¹⁵-Zahlen B_k (vgl. [9, Seite 52]).

Wichtiger als die Primzahlformel selbst, für deren Richtigkeit RIEMANN nur heuristische Gründe angegeben hatte, war seine Idee, durch Anwendung der Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Variablen auf das Studium einer ganz bestimmten Funktion, hier der Zetafunktion, zahlentheoretische Sätze zu gewinnen. RIEMANNS Vorschlag erwies sich in der Folgezeit als durchaus fruchtbar und führte zum Beweis des Primzahlsatzes: 1896 (also erst 100 Jahre nach den Rechnungen von LEGENDRE und GAUSS) gelang HADAMARD [23] (und unabhängig davon und nahezu zeitgleich DE LA VALLÉE POUSSIN [14]) der Beweis des Primzahlsatzes. Es ging die Mär,

¹⁴Hier ist DANIEL BERNOULLI gemeint

¹⁵Hier ist JAKOB BERNOULLI gemeint.

dass die Bezwingen des Primzahlsatzes unsterblich würden, und in der Tat, beide wurden fast 100 Jahre alt. Diese ersten Beweise des Primzahlsatzes verwendeten entscheidend die Tatsache, dass die Zetafunktion in der Halbebene $\operatorname{Re}(s) \geq 1$ nicht verschwindet, und verliefen im Wesentlichen so: Man stellt zunächst die Summe $\sum_{n \leq x} \Lambda(n)$ der Koeffizienten der in $\sigma := \operatorname{Re}(s) > 1$ konvergenten DIRICHLET-Reihe $\sum \Lambda(n)n^{-s}$ von $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ durch ein komplexes Integral längs der vertikalen Geraden $\operatorname{Re}(s) = \sigma_0$ mit $\sigma_0 > 1$ dar, in dessen Integrand der Quotient $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ eingeht. Da ζ in $\sigma \geq 1$, ja sogar noch in einem gewissen Bereich $\sigma > 1 - \eta(|t|)$ nullstellenfrei¹⁶ ist, dann kann der Integrationsweg so weit nach links verlagert werden, dass man den Pol der Zetafunktion an $s=1$ zur asymptotischen Auswertung der Koeffizientensumme $\sum_{n \leq x} \Lambda(n)$ via Residuensatz ausnutzen kann. Diese Auswertung von $\sum_{n \leq x} \Lambda(n)$ liefert den Primzahlsatz in der Form $\pi(x) \sim \operatorname{li}(x)$. Klar ist, dass man für die Verlagerung des Integrationsweg nach links genügend gute obere Abschätzungen für den Integranden, insbesondere für $\left| \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + it) \right|$ in $1 - \eta(|t|) < \sigma < \sigma_0$ bei $|t| \rightarrow \infty$ benötigt. Sowohl die Sicherung der Nullstellenfreiheit von ζ in $1 - \eta(|t|) < \sigma < 1$ bei genügt großem $|t|$ als auch die Gewinnung der erwähnten guten Schranken für $\left| \frac{\zeta'}{\zeta} \right|$ in diesem Bereich ist zwar mühevoll, dafür hat dieser älteste Weg zum Primzahlsatz den Vorteil, sofort zu einer quantitativen Verfeinerung des Typs

¹⁶Man kann bisher **nicht** die Existenz einer noch so kleinen reellen Konstanten $\eta \in]0, \frac{1}{2}]$ garantieren, so dass ζ in der Halbebene $\sigma > 1 - \eta$ nullstellenfrei ist. Man kennt lediglich bei $|t| \rightarrow \infty$ gegen Null konvergente positive Funktionen $\eta(|t|)$, so dass $\zeta(\sigma + it) \neq 0$ ist für $\sigma > 1 - \eta(|t|)$ und $|t|$ genügend groß. DE LE VALLÉE POUSSIN [15] hat dies 1899 für $\eta(\tau) = \frac{c}{\log(\tau)}$ bewiesen; das beste Resultat in dieser Richtung wurde 1958 unabhängig voneinander (im wesentlichen) von KOROBOV [32] und VINOGRADOV [82] (vgl. [84, Kapitel V, Seite 188, ab Zeile 18], insbesondere den Hinweis auf RICHERTS briefliche Korrektur des Ergebnisses [84, Seite 226]) gefunden und lautet $\eta(\tau) = c \left(\log(\tau) \right)^{-\frac{2}{3}} \left(\log(\log(\tau)) \right)^{-\frac{1}{3}}$, dabei bedeutet c jeweils absolute positive Konstanten.

$$\pi(x) = li(x) + O\left(x \exp\left(-c \log^\alpha(x)\right)\right) \text{ bei } x \rightarrow \infty \quad (1.31)$$

mit einer positiven Konstanten c zu führen. Auf mögliche Werte von α kommen wir später zurück.

Neue Wege zum Primzahlsatz haben um 1930 herum die Taubersche¹⁷ Sätze von IKEHARA und WIENER eröffnet. Grundsätzlich gestalten Taubersche Sätze asymptotische Aussagen über $\sum_{n \leq x} a_n$, wenn man das asymptotische Verhalten bei $\sigma \rightarrow 1$ der in $\sigma > 1$ durch die Reihe $\sum a_n n^{-s}$ definierten Funktion genügend gut kennt und wenn die Reihe-Koeffizienten a_n geeignete Zusatzbedingungen erfüllen. Für die Beweise und Anwendungen der angesprochenen Tauberschen Sätze in der Primzahltheorie wurde die aufwendige Abschätzung von $\left|\frac{\zeta'}{\zeta}\right|$ an ∞ ebenso überflüssig wie der Nachweis des Nichtverschwindens von ζ etwas links von $\sigma = 1$. Dafür hängen die Beweise dieser Tauberschen Sätze von gewissen Resultaten über FOURIER-Transformation ab, die ihrerseits keineswegs auf der Hand liegen.

Vor wenigen Jahren hat NEWMAN [44] einen dritten analytischen Weg zum Primzahlsatz gefunden. Wir werden auf den NEWMANSchen Beweis in Kapitel 4 ausführlich eingehen. Der NEWMANSche Ansatz kommt einerseits mit Integration längs endlicher Wege (und der Tatsache $\zeta(s) \neq 0$ in $\sigma \geq 1$) aus, umgeht also Abschätzungen bei ∞ ; andererseits ist er frei von Sätzen der FOURIER-Analyse.

Im Jahre 1948 fanden (etwa) gleichzeitig SELBERG [71] und ERDÖS [19] elementare¹⁸ Beweise des Primzahlsatzes. Dies wirkte wie eine Sensation: Seit TSCHEBYSCHEW hatte man sich ein Jahrhundert lang immer wieder

¹⁷Taubersche Sätze sind Sätze, die aus dem asymptotischen Verhalten der erzeugenden Funktion $\sum a_n n^{-s}$ für $s \rightarrow 1+$ unter gewissen Zusatzbedingungen auf das asymptotische Verhalten der summatorischen Funktion $\sum_{n \leq x} a_n$ der Koeffizienten schließen lassen.

¹⁸Elementar ist nicht zu verwechseln mit einfach. Elementarer Beweis des Primzahlsatzes ist ein Beweis, der ohne Kenntnis der komplexen Funktionentheorie auskommt.

vergeblich um einen derartigen Weg bemüht. ”‘Dies zeigt’” um mit SIEGEL zu sprechen ”‘dass man über die wirklichen Schwierigkeit eines Problem nichts sagen kann, bevor man es gelöst hat’” . Die ERDÖS–SELBERGSche Entdeckung verhalf in der Folgezeit den elementaren Methoden in der Zahlentheorie zu neuem Ansehen und gab ihnen den gebührenden Platz neben den analytischen zurück. Auch die elementaren Beweise sind alles andere als einfach und erbringen bis heute kein so gutes Restglied wie die Verwendung der RIEMANNschen Zetafunktion. Uns schienen die analytischen Beweise durchsichtiger zu sein. Daher geben wir in dieser Arbeit nur analytische Beweise des Primzahlsatzes wieder.

1.3 Größenordnung des Fehlergliedes $\pi(x) - li(x)$

Hinsichtlich der Güte des Fehlerterms $r(x) := \pi(x) - li(x)$ in Abhängigkeit von nullstellenfreien Gebieten der Zetafunktion gilt genauer folgendes: Ist $\zeta(\sigma + it) \neq 0$ für alle $\sigma > 1 - \eta$, so ist

$$\pi(x) = li(x) + O\left(x^{1-\eta} \log(x)\right). \quad (1.32)$$

DE LA VALLÉE POUSSIN erhielt

$$\pi(x) = li(x) + O\left(x \exp\left(-c\sqrt{\log(x)}\right)\right). \quad (1.33)$$

Erst 1922 konnte (1.33) verschärft werden. LITTLEWOOD [40] zeigte

$$\pi(x) = li(x) + O\left(x \exp\left(-c\sqrt{\log(x) \log(\log(x))}\right)\right). \quad (1.34)$$

TSCHUDAKOV [12] hat bewiesen:

$$\pi(x) = li(x) + O\left(x \exp\left(-c(\log(x))^\alpha\right)\right) \text{ für jedes } \alpha < \frac{4}{7} \text{ und } c > 0. \quad (1.35)$$

Weitere Verbesserungen erzielten TITCHMARSH [79] und TATUZAWA [76]. Die beste heute beweisbare Version des Primzahlsatzes stammt von VINOGRADOV [82] und unabhängig davon KOROBOW [32], wobei das Ergebnis¹⁹ durch RICHERT (geringfügig) korrigiert wurde: Mit einer geeigneten Konstante $c > 0$ ist für $|t| \geq 2$

$$\zeta(s) \neq 0 \text{ für } 1 - c(\log(t))^{-\frac{2}{3}} \left(\log(\log(t))\right)^{-\frac{1}{3}} \quad (1.36)$$

hieraus folgt

$$\pi(x) = li(x) + O\left(x \exp\left(-c(\log(x))^{\frac{3}{5}} (\log(\log(x)))^{-\frac{1}{5}}\right)\right). \quad (1.37)$$

Man vermutet, dass $\pi(x)$ weit näher an $li(x)$ verläuft, dass nämlich die Aussage:

$$\pi(x) = li(x) + O\left(\sqrt{x} \log(x)\right) \quad (1.38)$$

richtig ist. Diese Version des Primzahlsatzes würde²⁰ aus der RIEMANNschen Vermutung folgen, man setze in (1.32) $\eta = \frac{1}{2}$ (vgl. [62]; [25, Seite 57]; [51, VII, §5]).

Die elementaren Beweis-Methoden erlauben, für eine geeignete Konstanten $c > 0$

¹⁹Siehe die Bemerkung 3.3 auf Seite 37

²⁰Dies hat VON KOCH zum ersten Mal bewiesen [83].

$$\pi(x) = li(x) \cdot \left(1 + O\left((\log(x))^c\right)\right). \quad (1.39)$$

zu beweisen²¹. dass (1.39) mit jedem beliebigen $c > 0$ gilt, zeigten unabhängig voneinander BOMBIERI [6, 7] und WIRSING [86, 87]. Im Jahre 1973 haben LAVRIK und SOBIROV [1], die die Methoden von DIAMOND und STEINIG [74] etwas verbesserten, mit elementaren Methoden das Restglied

$$O\left(x \exp\left(-c(\log(x))^{\frac{1}{6}}(\log(\log(x)))^{-3}\right)\right). \quad (1.40)$$

angegeben. Das beste bisher erzielte Restglied mit elementaren Methoden stammt von DIAMOND [16] und lautet

$$O\left(x \exp\left(-c(\log(x))^{\frac{1}{6}-\varepsilon}\right)\right); \quad (1.41)$$

nachdem für lange Zeit als offen galt, ob mit der elementaren Methode eine Abschätzung

$$\pi(x) = li(x) + O\left(x \exp\left(-(\log(x))^c\right)\right), c > 0. \quad (1.42)$$

erzielt werden kann. [66, Seite 49]

²¹Dabei ist $c = \frac{1}{200}$ nach CORPUT [81], $c = \frac{1}{10}$ nach KUHN [33], $c = \frac{1}{6} - \varepsilon$ nach BREUSCH [8], $c = \frac{3}{4}$ nach WIRSING [86, 87], $c = 1 - \varepsilon$ nach DUSUMBETOV [18].

1.4 Vorzeichen (Signum) des Fehlergliedes $\pi(x) - li(x)$

Das Fehlerglied $r(x) := \pi(x) - li(x)$ ist im bisher ($x \leq 10^{18}$) stets negativ, d.h. dort gilt $\pi(x) < li(x)$. Nachdem zunächst vermutet²² worden war, dass die Werte von $li(x)$ stets über demjenigen von $\pi(x)$ liegen, bewies HARDY [24] bereits 1914, dass es ein n_0 gibt mit $li(n_0) < \pi(n_0)$. LITTLEWOOD [39] hat außerdem bewiesen, dass $r(x)$ unendlich oft das Vorzeichen wechselt. Unter Annahme der RIEMANNSchen Vermutung zeigte SKEWES [72] im Jahre 1933, dass dies mindestens einmal unterhalb $10^{10^{34}}$ geschieht. Mehr als 20 Jahre später (und ohne die RIEMANNSchen Vermutung vorauszusetzen) zeigte SKEWES [73], dass der Vorzeichenwechsel von $r(x)$ erst unterhalb

$$x < S := e^{e^{e^{e^{7,705}}}} = \exp(\exp(\exp(\exp(7,705)))) \quad (1.43)$$

geschieht. Die SKEWESSche Zahl S ist wohl die größte Zahl, die je in der Mathematik eine wohldefinierten Zwecke hatte. Sie hat zu viele Dezimalstellen, dass die vorhandene Materie nicht ausreichen würde, sie ziffernmäßig aufzuschreiben (vgl. [63]). LEHMAN [36] erniedrigt diese Zahl auf $1,65 \cdot 10^{1165}$ aber auch diese Schranke liegt noch weit außerhalb der Reichweite jeden Rechners (vgl. [69, Seiten 92–93]). TE RIELE [77] zeigte, dass es zwischen $6,62 \cdot 10^{370}$ und $6,69 \cdot 10^{370}$ mindestens 10^{180} Zahlen x gibt, so dass $\pi(x) > li(x)$ gilt. BAYS und HUDSON [3, 4] haben in einem an die Fachzeitschrift Mathematics of Computation gesendeten, aber noch nicht veröffentlichten Artikel gezeigt, dass es einen früheren Vorzeichenwechsel von $\pi(x) - li(x)$ in der Nähe von $1,39822 \cdot 10^{316}$ gibt. Siehe das Website²³:

<http://www.ams.org/jourcgi/jour-pbprocess?fn=110&arg1=>

²²Dies hat RIEMANN [59] ohne Beweis vermutet. (vgl. [48])

²³Stand: März 1999

S0025-5718-99-01105-9&u=/mcom/0000-000-00

bzw.

<http://www.ams.org/mcom/2000-69-231/>

S0025-5718-99-01104-7/home.html

PINTZ [48] zeigte, dass (mit effektiv angegebaren Konstanten c_1, c_2) die Anzahl der Vorzeichenwechsel der Funktion $\pi(x) - li(x)$ im Intervall $[1, Y]$ größer als $c_1 \sqrt{\log(Y)}$, wenn nur $Y > c_2$ ist. KACZOROWSKI gab im Jahre 1985 eine untere Schranke für den Vorzeichenwechsel der Funktion $\pi(x) - li(x)$ im $[1, Y]$ mit $c \cdot \log(Y)$ an, ohne die Konstante c explizit anzugeben (vgl. [70, Seite 22]).

1.5 Sonstiges

- Wir weisen darauf hin, dass die Approximation $\pi(x) \sim R(x) := li(x) - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} li(\sqrt[k]{x})$ für den bis heute betrachteten Bereich $x \leq 10^{18}$ besser ist (vgl. Kapitel 8 dieser Arbeit), wobei der Buchstabe R zu Ehren RIEMANNs gewählt worden ist.
- Aus [70, Seite 3] entnahmen wir folgende chronologische Tabelle (siehe Abbildung 1.1 auf die Seite 18)
- Die ersten Beweise des Primzahlsatzes waren allerdings sehr lang und kompliziert. Es dauerte weitere 84 Jahre, bis der Beweis so vereinfacht werden konnte, dass er nur wenige Seiten in Anspruch nimmt. Ein wichtiger Verdienst gebührt hierbei der Arbeit [44] von NEWMAN aus dem Jahre 1980.

1.6 Gliederung der Arbeit

Die vorliegende Arbeit ist wie folgt aufgebaut:

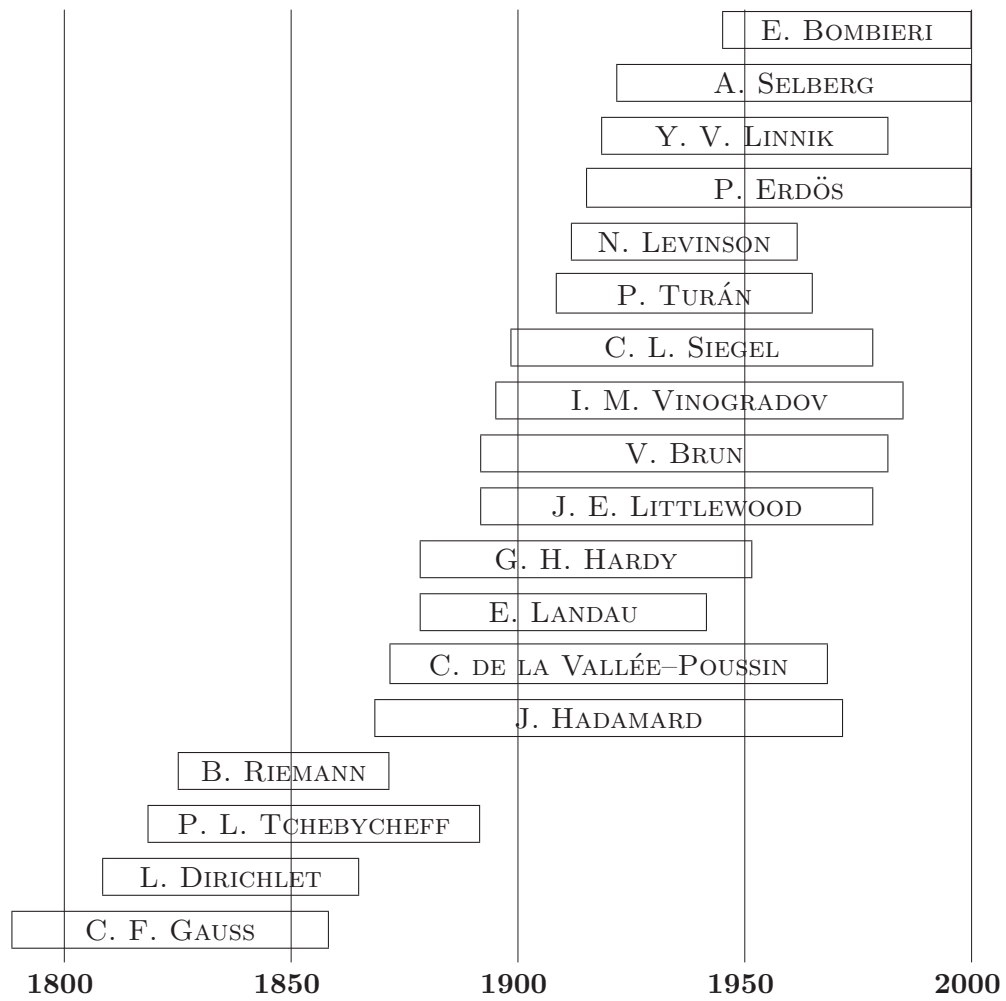


Abbildung 1.1: Chronologische Tabelle

Nach dieser historischen Einführung listen wir im Kapitel 2 einige Grundlagen auf, die wir in der Arbeit brauchen werden.

Im Kapitel 3 behandeln wir einige Eigenschaften der Zetafunktion, denn die Zetafunktion hat mit den Primzahlen engstes zu tun.

Im Kapitel 4 dieser Arbeit skizzieren wir einen analytischen Beweis des Primzahlsatzes.

Im Kapitel 5 stellen wir eine Idee zum Beweis des Primzahlsatzes nach D. WOLKE vor.

Kapitel 6 ist einem Beweis des Primzahlsatzes nach NEWMAN gewidmet.

Im Kapitel 7 geben wir einen Überblick über einige Verfahren zur Berechnung von $\pi(x)$ für gegebene x . Wir stellen dort u. a. das Verfahren von LEGENDRE, MEISSEL sowie LEHMER vor.

Im Kapitel 8 listen wir einige ausgedehnte Tabellen für $\pi(x)$, $\text{li}(x)$, $R(x)$ und $\frac{x}{\log(x)}$ zur numerischen Überprüfung des Primzahlsatzes auf. Außerdem zeichnen wir Diagramme für $\pi(x) - \text{li}(x)$, $\pi(x) - R(x)$, sowie $\pi(x) - \frac{x}{\log(x)}$ und kommentieren diese.

Schließlich, fassen wir die wichtigsten Teile der Arbeit zusammen, und listen Lebensdaten einiger in dieser Arbeit erwähnten Mathematiker auf.

Kapitel 2

Grundlagen

In diesem Kapitel listen wir einige Definitionen, Begriffe sowie Hilfssätze aus der Zahlentheorie sowie aus der komplexen Funktionentheorie auf, die man u. a. in [9, 78, 29, 55, 38] finden kann

Definition 2.1 • Ist $(a_\nu)_{\nu \geq k}$ eine Folge komplexer Zahlen, so heißt die Folge $(z_n)_{n \geq k}$, $z_n := \sum_{\nu=k}^n a_\nu$ der Partialsummen eine (unendliche) Reihe mit den Gliedern a_ν . Man schreibt $\sum_{\nu \geq k} a_\nu$, $\sum_k^\infty a_\nu$, $\sum_{\nu=k}^\infty a_\nu$ oder ganz einfach $\sum a_\nu$

- Eine Reihe $\sum a_\nu$ heißt konvergent, wenn die Partialsummenfolge z_n konvergiert, andernfalls heißt sie divergent.
- Eine Reihe $\sum a_\nu$ heißt absolut konvergent, wenn die Reihe $\sum |a_\nu|$ konvergiert.

Bemerkung 2.1

- Das Symbol $\sum a_\nu$ ist zweideutig: es bezeichnet sowohl die Partialsummenfolge als auch (gegebenenfalls) deren Limes.
- Konvergente Reihen können bei Umordnung unendlich vieler Glieder

den Limes ändern, aber es gilt: Ist $\sum a_\nu$ absolut konvergent, so konvergiert jede ”Umordnung” dieser Reihe zum selben Grenzwert.

Lemma 2.1 (Konvergenzkriterium von Cauchy für Reihen) *Eine Reihe $\sum a_\nu$ konvergiert genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass gilt: $\left| \sum_{\nu=m+1}^n a_\nu \right| < \varepsilon$, für alle m, n mit $n > m > n_0$.*

Beweis Der Beweis wird in [55] geliefert. ■

Definition 2.2 *Seien $D \subset \mathbb{C}$ ein Bereich, $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion und $c := a + ib \in D$.*

- $\lim_{s \rightarrow c} f(s) = L \Leftrightarrow$ wenn es zu jedem reellen $\varepsilon > 0$ ein reelles $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ gibt, so dass $|f(s) - L| < \varepsilon$ für alle $s \in D$ mit $|s - c| < \delta$.
- f ist stetig in c , wenn $\lim_{s \rightarrow c} f(s) = f(c)$.
- f heißt komplex differenzierbar in c , wenn der Grenzwert $\lim_{s \rightarrow c} \frac{f(s) - f(c)}{s - c}$ existiert.
- f heißt holomorph, analytisch bzw. regulär in D , wenn f in jedem Punkt von D komplex differenzierbar ist.
- f ist holomorph in c , wenn es eine offene Umgebung $U \subset D$ von c gibt, so dass die auf U eingeschränkte Funktion $f|_U$ holomorph in U ist.
- Wenn eine Funktion $f(s)$ in der Umgebung eines Punktes z analytisch ist, nicht aber in z selbst, dann heißt z eine isolierte singuläre Stelle der Funktion $f(s)$.
- Hat eine sonst holomorphe Funktion $f(s)$ für endliche Werte von s nur Pole als singuläre Stellen, dann heißt sie meromorph.

Bemerkung 2.2

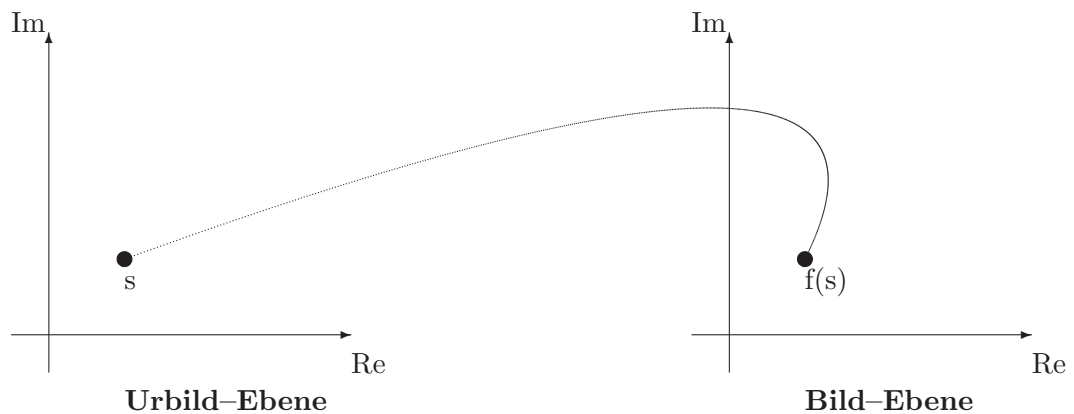


Abbildung 2.1: Illustration einer komplexen Funktion

- Eine in c holomorphe Funktion ist komplex differenzierbar in c , in-
dessen ist eine in c komplex differenzierbare Funktion nicht notwendig
holomorph in c .
- Jede im offenen Gebiet D holomorphe Funktion ist beliebig oft komplex
differenzierbar in D .

Definition 2.3 • Eine Funktionenfolge $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$ heißt in A
gleichmäßig konvergent in $A \subset D$ gegen $f_n : A \rightarrow \mathbb{C}$, wenn zu jedem
 $\varepsilon > 0$ ein $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, so dass gilt: $|f_n(s) - f(s)| < \varepsilon$ für
alle $n \geq n_0$ und alle $s \in A$.

- Eine Reihe $\sum f_n$ von Funktionen konvergiert gleichmäßig in A , wenn
die Folge der Partialsummen gleichmäßig in A konvergiert.
- Man nennt eine Folge bzw. eine Reihe kompakt konvergent in X , wenn
sie in jeder kompakten Teilmenge von X gleichmäßig konvergiert.

Kriterium 2.1 (Majorantenkriterium von Weierstraß) Es sei $f_n : X \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktionenfolge; es sei $A \neq \emptyset$ eine Teilmenge von X , und
es gebe eine Folge reeller Zahlen $M_n \geq 0$ so dass $|f_n|_A \leq M_n$, $n \in \mathbb{N}$ und

$\sum M_n < \infty$. Dann konvergiert die Reihe $\sum f_n$ gleichmäßig in A . Dabei sei $|f|_A := \sup_{x \in A} |f(x)|$ die Supremumnorm.

Beweis Der Beweis wird in [55, Seite 103] geliefert. ■

Definition 2.4 Eine Reihe $\sum f_n$ von Funktionen $f_n : X \rightarrow \mathbb{C}$ heißt normal konvergent in X , wenn jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung U hat, so dass gilt $\sum |f_n|_U < \infty$.

Lemma 2.2 Sei $f(n)$ eine komplexe (für alle natürlichen n definierte) multiplikative Funktion, d.h. $f(m \cdot n) = f(n) \cdot f(m)$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $\text{ggT}(m, n) = 1$, so dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n| < \infty.$$

Dann ist

$$\prod_{p \in \mathbb{P}} (1 + f(p) + f(p^2) + \dots) = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|.$$

Falls f **streng** multiplikativ, d.h. $f(m \cdot n) = f(n) \cdot f(m)$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$, so dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n| < \infty.$$

Dann ist

$$\prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - f(p)} = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$$

.

Beweis [2, Seite 230] ■

Lemma 2.3 (Abelsche Partielle Summation) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen, $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende, unbeschränkte Folge reeller Zahlen und g eine im Intervall $[\lambda_1, x]$ stetig differenzierbare (komplexwertige) Funktion, so gilt für alle

$$\sum_{\lambda_n \leq x} a_n g(\lambda_n) = \left(\sum_{\lambda_n \leq x} a_n \right) \cdot g(x) - \int_{\lambda_1}^x \left(\sum_{\lambda_n \leq u} a_n \right) \cdot g'(u) du.$$

Beweis [67, Seite 193] ■

Lemma 2.4 (Legendres Identität) Für jede Primzahl p und für jede natürliche Zahl n ist die Vielfachheit $\nu_p(n!)$ von p in $n!$ gleich $\sum_{j=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^j} \right\rfloor$.

Bemerkung Man beachte, dass $\left\lfloor \frac{n}{p^j} \right\rfloor$ Null ist genau dann, wenn $p^j > n$.

Beweis (Lemma 2.4) Offenbar ist für $j \in \mathbb{N}_0$

$$A_p(n, j) := \#\{k \in \mathbb{N} : k \leq n, \nu_p(k) = j\} = \left\lfloor \frac{n}{p^j} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^{j+1}} \right\rfloor.$$

und damit wegen der strengen Additivität¹ von ν_p

$$\begin{aligned} & \nu_p(n!) \\ &= \sum_{k=1}^n \nu_p(k) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} j A_p(n, j) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} j \left\lfloor \frac{n}{p^j} \right\rfloor - \sum_{j=2}^{\infty} (j-1) \left\lfloor \frac{n}{p^j} \right\rfloor \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^j} \right\rfloor \end{aligned} \tag{2.1}$$

■

Lemma 2.5 Für alle reellen $x > 1$ gilt $\pi(x) < 6 \frac{x}{\log(x)}$.

Beweis [2, Seite 82] ■

Lemma 2.6 (Mertens) Bei $x \rightarrow \infty$ gilt $\sum_{p \leq x} \frac{\log(p)}{p} = \log(x) + O(1)$.

Beweis [2, Seite 89] ■

Bemerkung Nach [78, Seite 14, Theorem 7] liegt das Fehlerglied $O(1)$ im offenen Intervall $]-1-\log(4), \log(4)[$; beachte $\log(4)=1,386\ 294 \dots$

¹Eine zahlentheoretische Funktion f heißt **streng** additiv, falls $f(n \cdot m) = f(n) + f(m)$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt.

Lemma 2.7 (Mertens) *Es gibt eine reelle Konstante B , so dass für $x \rightarrow \infty$ gilt $\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \log(\log(x)) + B + O(\frac{1}{\log(x)})$.*

Beweis [2, Seite 90] ■

Lemma 2.8 (Residuensatz) *Ist die Funktion $f(s)$ in einem einfach zusammenhängenden Gebiet G , das von der geschlossenen Kurve K begrenzt wird, mit Ausnahme der endlich vielen Punkten z_0, z_1, \dots, z_n eindeutig und analytisch, dann ist der Wert des im Gegenuhrzeigersinn über den geschlossenen Weg K genommen Integrals gleich dem Produkt aus $2\pi i$ und der Summe der Residuen in allen diesen singulären Punkten:*

$$\int_K f(s) ds = 2\pi i \sum_{k=0}^n \operatorname{Res} f(s) \Big|_{s=z_k} \quad (2.2)$$

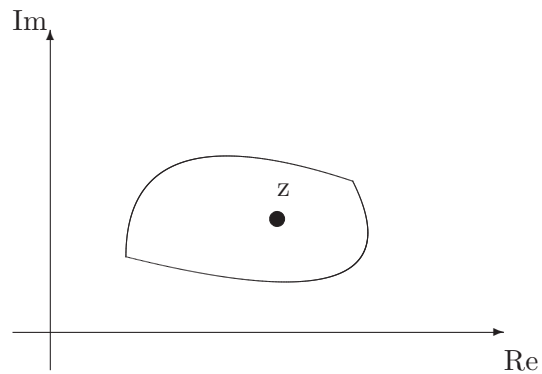
Beweis [55] ■

Lemma 2.9 (Cauchysche Integralformel) • *Ist $f(z)$ auf einer geschlossenen Kurve K und in dem von ihr umschlossenen einfach zusammenhängenden Gebiet analytisch, dann gilt für jeden inneren (bzw. äußeren) Punkt z dieses Gebietes (siehe Abbildung 2.2 auf Seite 26) die Darstellung :*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(s)}{s-z} ds, \quad (2.3)$$

wenn s die Kurve K in Gegenuhrzeigersinn durchläuft.

- Wenn eine Funktion $f(z)$ im gesamten Teil der Ebene außerhalb des geschlossenen Integrationsweges K analytisch ist, dann wird der Wert der Funktion $f(z)$ in einem Punkt z dieses Gebietes mit Hilfe der



Punkt z innerhalb K

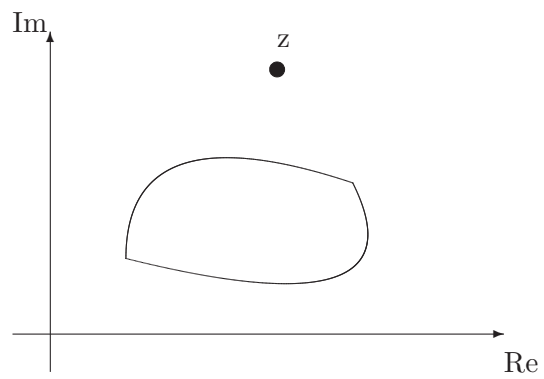
Abbildung 2.2: Illustration der CAUCHYschen Integralformel: Punkt z innerhalb K

CAUCHYschen Formel (2.3) dargestellt, aber die Kurve des geschlossenen Integrationsweg K ist nunmehr im Uhrzeigersinn zu durchlaufen (siehe Abbildung 2.3 auf Seite 27)

Beweis [55] ■

Bemerkung Mit Hilfe der CAUCHYschen Integralformeln lassen sich die Funktionswerte einer analytischen Funktion im Inneren (bzw. Äußeren) eines Gebietes durch die Funktionswerte auf dem Rande des Gebietes ausdrücken.

□



Punkt z außerhalb K

Abbildung 2.3: Illustration der CAUCHYSchen Integralformel: Punkt z außerhalb K

Kapitel 3

Einige Eigenschaften der Zetafunktion

Bevor wir mit einem analytischen Beweis des Primzahlsatzes anfangen, behandeln wir einige Eigenschaften der Zetafunktion. Die RIEMANNsche Zetafunktion $\zeta(s)$ ist durch die Reihe

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \quad (s > 1) \quad (3.1)$$

und deren analytische Fortsetzung definiert. Dabei ist für komplexe s das n^{-s} durch die Gleichung $n^{-s} = e^{-s \log(n)}$ gegeben, wobei $\log(n)$ den reellen (natürlichen) Logarithmus der positiven ganzen Zahl n bedeutet.

Zunächst gilt

Satz 3.1 *Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ ist für $\operatorname{Re}(s) \geq 1 + \varepsilon$ gleichmäßig konvergent, und die durch sie in der Halbebene $\operatorname{Re}(s) > 1$ definierte Zetafunktion ist dort regulär.*

Beweis Sei $s = \sigma + it$. Die gleichmäßige Konvergenz ergibt sich aus

$$\begin{aligned}
& \left| n^s \right| \\
&= \left| e^{s \log(n)} \right| \\
&= \left| e^{Re(s) + i \cdot Im(s)} \log(n) \right| \\
&= \left| e^{(Re(s) \log(n))} \cdot e^{i \cdot Im(s) \log(n)} \right| \\
&= \left| e^{(Re(s) \log(n))} \right| \\
&= n^{Re(s)} \\
&\leq n^{-(1+\varepsilon)} \text{ für } Re(s) \geq 1 + \varepsilon
\end{aligned} \tag{3.2}$$

und die Regularität von $\zeta(s)$ in $Re(s) > 1$ folgt aus dem bekannten WEIERSTRASSschen Kriterium¹ über die Regularität der Grenzfunktion einer gleichmäßig konvergenten Folge analytischer Funktionen. Denn es gibt zu jedem Punkt aus $\sigma > 1$ ein ε so, dass dieser innerer Punkt von $\sigma \geq 1 + \varepsilon$ ist. ■

Satz 3.2 (über gewisse Dirichlet-Reihen) *Gilt bei beliebigem reellem $\varepsilon > 0$ für die Koeffizienten an der DIRICHLET-Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ die Bedingung $a_n = O(n^\varepsilon)$ bei $n \rightarrow \infty$, so konvergiert diese Reihe mindestens in $\sigma > 1$ absolut und kompakt gleichmäßig, definiert dort also eine holomorphe Funktion.*

Beweis Man fixiere ein reelles $\sigma_0 > 1$ beliebig; sodann wähle man ε reell mit $0 < \varepsilon < \sigma_0 - 1$ beliebig und hat nach Voraussetzung $|a_n| \leq c(\varepsilon) n^\varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und daher

¹Näheres siehe [34, Seite 151].

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \right| \\
& \leq c(\varepsilon) \left| \sum_{n=1}^{\infty} n^{-(\sigma-\varepsilon)} \right| \\
& \leq c(\varepsilon) \left| \sum_{n=1}^{\infty} n^{-(\sigma_0-\varepsilon)} \right| \text{ für alle komplexen } s \text{ mit } \operatorname{Re}(s) = \sigma \geq \sigma_0
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-(\sigma_0-\varepsilon)}$ konvergiert wegen $\sigma_0 - \varepsilon > 1$ und das WEIERSTRASSsche Majoranten-Kriterium liefert die Behauptung. ■

Das Bindeglied zwischen den Primzahlen und der Zetafunktion ist

Satz 3.3 (Eulersche Produktdarstellung von ζ) Für $\operatorname{Re}(s) > 1$:

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \tag{3.4}$$

Beweis Der Beweis ergibt sich aus dem Lemma 2.2 auf Seite 23 mit der streng multiplikativen Funktion $f(n) := n^{-s}$. ■

Bemerkung 3.1

Eine mehr amüsante Beweisvariante von der Existenz unendlich vieler Primzahlen lässt sich mit Hilfe der EULERSchen Produktdarstellung von ζ (Satz 3.3 auf Seite 30) herleiten : Für jedes ganze $s \geq 2$ ist jeder Faktor rechts in (3.4) rational. Unter der Annahme, es gäbe nur endlich viele Primzahlen, wäre dann das Produkt rechts in (3.4) rational, also auch $\zeta(s)$. Nun ist aber die Irrationalität (sogar Transzendenz) von $\zeta(2j)$ für alle $j \in \mathbb{N}$ wohlbekannt. □

Nun zeigen wir zwei Sätze über die Zetafunktion.

Satz 3.4 Für jedes natürliche N gilt in $\sigma > 1$

$$\sum_{n=N}^{\infty} n^{-s} = \frac{1}{s-1} N^{1-s} + s \int_N^{\infty} (1 - \langle u \rangle) u^{-s-1} du \tag{3.5}$$

Dabei stellt das Integral eine in $\sigma > 0$ holomorphe Funktion dar.

Beweis Für reelles $x \geq N$ ist nach Lemma 2.3 auf Seite 23 über partielle Summation mit $a_n = 1$; $g(x) = x^{-s}$ und $\lambda_n := n$ te natürliche Zahl gilt :

$$\begin{aligned} & \sum_{N \leq n \leq x} n^{-s} \\ &= \left(\sum_{N \leq n \leq x} 1 \right) \cdot g(x) - \int_N^x \left(\sum_{N \leq n \leq u} 1 \right) \cdot g'(u) du \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$= \left([x] - N + 1 \right) \cdot x^{-s} - s \int_N^x \left([u] - N + 1 \right) \cdot u^{-s-1} du \quad (3.7)$$

In der Halbebene $\sigma > 1$ folgt daraus bei $x \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=N}^{\infty} n^{-s} \\ &= s \int_N^{\infty} \left(u - N + 1 - \langle u \rangle \right) u^{-s-1} du \\ &= \frac{1}{s-1} N^{1-s} + s \int_N^{\infty} \left(1 - \langle u \rangle \right) u^{-s-1} du \end{aligned} \quad (3.8)$$

Nun zeigen wir, dass das in $\sigma > 0$ absolut konvergente Integral

$$J(s) = \int_N^{\infty} \left(1 - \langle u \rangle \right) u^{-s-1} du \quad (3.9)$$

dort eine holomorphe Funktion definiert.

Unter Verwendung der Tatsache

$$\begin{aligned} & \sum_{j \geq 0} \frac{1}{j!} \left(-h \cdot \log(u) \right)^j \\ &= e^{-h \cdot \log(u)} \\ &= u^{-h} \end{aligned} \quad (3.10)$$

erhalten wir für reelle $u \geq 1$ und komplexe $h \neq 0$:

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{1}{h} (u^{-h} - 1) + \log(u) \right| \\
 &= \left| \frac{\left(1 - h \log(u) + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j!} (-h \log(u))^j \right) - 1}{h} + \log(u) \right| \\
 &= \left| \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} h^{j-1} \log^j(u) \right| \tag{3.11} \\
 &= |h| \log^2(u) \left| \sum_{j \geq 2} \frac{(-1)^j}{(j+2)!} (h \log(u))^j \right| \\
 &\leq |h| \log^2(u) \sum_{j \geq 2} \frac{1}{j!} (|h| \log(u))^j \\
 &= |h| u^{|h|} \log^2(u),
 \end{aligned}$$

denn

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j \geq 2} \frac{1}{j!} (|h| \log(u))^j \\
 &= e^{|h| \log(u)} \\
 &= u^{|h|}
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Damit gilt für reelle $u \geq 1$ und komplexe $h \neq 0$ die Abschätzung

$$\left| \frac{1}{h} (u^{-h} - 1) + \log(u) \right| \leq |h| u^{|h|} \log^2(u) \tag{3.13}$$

Führt man jetzt noch das ebenfalls in $\sigma > 0$ absolute konvergente Integral

$$K(s) = - \int_N^\infty \left(1 - \langle u \rangle\right) (\log(u)) u^{-s-1} du \quad (3.14)$$

ein, so folgt für komplexe $h \neq 0$ und s mit $\operatorname{Re}(s) > 0$, $\operatorname{Re}(s+h) > 0$

$$\begin{aligned} & \left| \frac{J(s+h) - J(s)}{h} - K(s) \right| \\ &= \left| \int_N^\infty \left(1 - \langle u \rangle\right) \left(\frac{1}{h} (u^{-h} - 1) + \log(u) \right) u^{-s-1} du \right| \text{ wegen (3.9) und (3.14)} \\ &\leq |h| \int_N^\infty u^{-\sigma-1+|h|} \log^2(u) du, \text{ wegen (3.13)} \\ &\leq |h| \int_N^\infty u^{-1-\frac{\sigma}{2}} \log^2(u) du \end{aligned} \quad (3.15)$$

Denn bei festen s mit $\sigma = \operatorname{Re}(s) > 0$ darf in Sinne des geplanten Grenzübergangs $h \rightarrow 0$ von vornherein $|h| \leq \frac{1}{2}$ vorausgesetzt werden. Damit ist die Holomorphie von J in $\sigma > 0$ gezeigt einschließlich der in der Halbebene gültigen (erwarteten) Gleichung $J' = K$. ■

Satz 3.5 *Die in $\sigma > 1$ durch die Reihe $\sum_{n=1}^\infty n^{-s}$ definierte RIEMANNsche Zetafunktion lässt sich in die Halbebene $\sigma > 0$ holomorph fortsetzen. Diese Fortsetzung ist dort holomorph bis auf einen einfachen Pol an der Stelle 1 mit Residuum 1; außerdem ist die Zetafunktion in $\sigma \geq 1$ nullstellenfrei.*

Beweis Nach Satz 3.4 gilt in $\sigma > 1$

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + s \int_1^\infty \left(1 - \langle u \rangle\right) u^{-s-1} du \quad (3.16)$$

wobei das Integral rechts in $\sigma > 0$ holomorph ist. Damit lässt sich die Zetafunktion in die Halbebene $\sigma > 0$ holomorph fortsetzen.

Es bleibt zu zeigen, $\zeta(1 + it) \neq 0$ für alle reellen $t \neq 0$.

Wäre $1 + iT$ mit $T \neq 0$ eine Nullstelle von ζ , so würde die TAYLOR-Entwicklung von $\zeta(s + iT)$ um $s=1$ beginnen mit

$$\zeta(s + iT) = (s - 1)\zeta'(1 + iT) + \dots \quad (3.17)$$

während nach (3.16) die LAURENT-Entwicklung von $\zeta(s)$ um $s=1$ mit

$$\zeta(s + iT) = \frac{1}{s - 1} + \dots \quad (3.18)$$

anfängt. Die durch

$$Z(s) := \zeta^3(s)\zeta^4(s + iT)\zeta(s + 2iT) \quad (3.19)$$

definierte Funktion Z ist in $\sigma > 1$ holomorph, in $\sigma > 0$ meromorph und hat wegen (3.17) und (3.18) an der Stelle $s=1$ eine Nullstelle, weswegen

$$\lim_{\sigma \rightarrow 1} \log(|Z(\sigma)|) = -\infty \quad (3.20)$$

gilt. Aus der EULERSchen Produktdarstellung (Satz 3.3 auf Seite 30) von ζ folgt durch Logarithmieren

$$\begin{aligned} & \log(\zeta(s)) \\ = & \sum_p -\log(1 - p^{-s}), \text{ in } \sigma > 1 \end{aligned} \quad (3.21)$$

wobei \log den Hauptwert des komplexen

Logarithmus bedeutet

Die Potenzreihenentwicklung von $-\log(1-z)$ ist bekanntlich

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} z^j. \quad (3.22)$$

Aus (3.21) folgt damit:

$$\begin{aligned} & \log(\zeta(s)) \\ &= \sum_p -\log(1 - p^{-s}) \\ &= \sum_p \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} p^{-js} \\ &:= \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Wegen

$$\sum_p \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} p^{-js} := \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \quad (3.24)$$

ist

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{j} & , \quad \text{falls } n = p^j \text{ und } p \text{ prim} \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases} \quad (3.25)$$

Da die a_n offenbar nichtnegative rationale Zahlen sind, ist mit $t := \text{Im}(s)$

$$\begin{aligned} & \log |\zeta(s)| \\ &= \text{Re}(\log(\zeta(s))) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-\sigma} \cos(t \log(n)), \end{aligned} \quad (3.26)$$

wobei \log oben und in der Summe unten wieder den reellen Logarithmus bedeutet.

Dabei ist zu beachten, dass

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Re}(a_n n^{-s}) \\
&= \operatorname{Re}(a_n n^{-(\sigma+it)}) \\
&= \operatorname{Re}(a_n e^{-(\sigma+it)\log(n)}) \\
&= \operatorname{Re}(a_n e^{-\sigma\log(n)} e^{-it\log(n)}) \\
&= a_n n^{-\sigma} \cos(t\log(n))
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Für $\sigma > 1$ ist wegen (3.19) und (3.26)

$$\begin{aligned}
& \log |Z(\sigma)| \\
&= 3 \cdot \log |\zeta(\sigma)| + 4 \cdot \log |\zeta(\sigma + iT)| + \log |\zeta(\sigma + 2iT)| \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-\sigma} (3 + 4 \cos(T \cdot \log(n)) + \cos(2T \log(n)))
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned}
& 3 + 4 \cos(\tau) + \cos(2\tau) \\
&= 2(1 + \cos(\tau))^2 \\
&\geq 0 \text{ für alle reellen } \tau
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Aus (3.28) und (3.29) folgt

$$\begin{aligned}
& \log |Z(\sigma)| \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-\sigma} (3 + 4 \cos(T \cdot \log(n)) + \cos(2T \log(n))) \\
&\geq 0 \text{ denn } a_n n^{-\sigma} \geq 0
\end{aligned} \tag{3.30}$$

was (3.20) widerspricht. ■

Bemerkung 3.2

Nach Satz 3.1 auf Seite 28 ist die Zetafunktion in die Halbebene $\sigma > 1$ wohldefiniert und holomorph. Nach Satz 3.5 auf Seite 33 lässt sich die Zetafunk-

tion in die Halbebene $\sigma > 0$ holomorph fortsetzen. Doch die Zetafunktion lässt sich in ganzen komplexen Ebene fortsetzen. (man vgl. [78, Seite 139, Theorem 1]). \square

Wir bereiten nun einige Hilfsmittel vor, die wir vor allem im Kapitel 5 brauchen werden. Zunächst geben wir ein klassisches² nullstellenfreies Gebiet für die Zetafunktion an.

Satz 3.6 *Es gibt eine positive Konstante c , so dass $\zeta(s) \neq 0$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\sigma := \operatorname{Re}(s) \geq 1 - \frac{c}{\log(2+|t|)}$.*

Bemerkung 3.3

- ROSSER und SCHOENFELD [65, 64] geben den Satz mit expliziten Konstanten: $\zeta(s) \neq 0$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) \geq 1 - \frac{1}{9,645908801 \log \left| \frac{t}{17} \right|}$.
- DE LA VALLÉE POUSSIN zeigte die Gleichung (1.33) auf Seite 13 mit Hilfe von $\zeta(s) \neq 0$ in $\operatorname{Re}(s) \geq 1 - \frac{c}{\log(2+|t|)}$.
- Die beste³ bis heute bekannte nullstellenfreie Zone für die Zetafunktion stammt von KOROBOV [31] sowie VINOGRADOV [82] und lautet $\zeta(s) \neq 0$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) \geq 1 - \frac{c}{\log^{\frac{2}{3}} |t| \left(\log(\log |t|) \right)^{\frac{1}{3}}}$, man beachte aber auch die von RICHERT (veröffentlicht in [84, Seite 226]) stammenden Korrekturen (besser gesagt ausführlicher Ausführung des Beweises) nicht des Resultats, sondern des Beweises. Aus diesem Grund rechnet WALFISZ den Satz sogar RICHERT zu: ...Wie dem auch sei, so wird die RICHERTsche Abschätzung (1.37)⁴ auf Seite 14 so lange für die beste gelten müssen, wie nicht eine noch schärfere mit Beweis veröffentlicht ist. (vgl. [84, Seite 227, ab Zeile 12]). RICHERT hat außerdem die Konstante c explizit angegeben: $c = \frac{1}{8757}$. Nach [78, Seite

²Im Satz 3.5 auf Seite 33 haben wir nur $\zeta(s) \neq 0$ für $\operatorname{Re}(s) \geq 1$ gezeigt.

³Daraus erhält man die Gleichung (1.37) auf Seite 14.

⁴in der Bezeichnungsweise dieser Arbeit

161] ist der Beweis von KOROBOV und VINOGRADOV in [28, chapter 6] zu finden.

Beweis (Satz 3.6 auf Seite 37) Der Beweis von Satz 3.6 ist in der Literatur [78, Seite 157, theorem 15], [13, Seite 86], [26, Seite 58, theorem 19] sehr verbreitet. Daher werden wir den Beweis nur ganz grob skizzieren. Man betrachtet die Gleichheit

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)n^{-s} \quad (3.31)$$

Unter Benützung von (3.29) schließt man (analog zu (3.30)) leicht auf

$$-3\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} - 4\operatorname{Re}\left(\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\right) - \operatorname{Re}\left(\frac{\zeta'(\sigma+2it)}{\zeta(\sigma+2it)}\right) \geq 0 \quad (3.32)$$

Nun versucht man die drei Terme der linken Seite von (3.32) nach oben abzuschätzen, was den Beweis beendet. ■

Schließlich geben wir eine paar Tatsachen über die DIRICHLET-Reihen. Sei f eine zahlentheoretische Funktion. Eine DIRICHLET-Reihe $D(f; s)$ ist definiert als

$$D(f; s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \quad (3.33)$$

Die Summe und das Produkt zweier DIRICHLET-Reihen sind [78, Seite 25] definiert als

$$D(f; s) + D(g; s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n) + g(n)}{n^s} \quad (3.34)$$

$$D(f; s) \cdot D(g; s) := \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sum_{\substack{(a,b) \\ ab=n}} f(a)g(b)}{n^s} \right) \quad (3.35)$$

Man beachte, dass

$$h(n) := \sum_{\substack{(a,b) \\ ab=n}} f(a)g(b) = (f * g)(n) \quad (3.36)$$

die Faltung von f und g ist und daher eine zahlentheoretische Funktion darstellt. $h(n)$ ist multiplikativ, falls f und g multiplikativ sind. [9, 68, 54].

Nun können wir zeigen

Satz 3.7 *Für die DIRICHLET-Reihe*

$$H(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}, \quad (3.37)$$

wobei f eine multiplikative zahlentheoretische Funktion mit

$$f(p) = \frac{1}{k} \text{ mit } k \geq 1 \text{ fest} \quad (3.38)$$

$$f(p^\nu) = \frac{1}{\nu!} \frac{1}{k} \left(\frac{1}{k} + 1 \right) \dots \left(\frac{1}{k} + (\nu - 1) \right) \text{ mit } \nu \geq 2 \text{ und } k \geq 1 \text{ fest} \quad (3.39)$$

gilt $H^k(s) = \zeta(s)$, wobei $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ die Zetafunktion ist.

Beweis Aus (3.35) erhalten wir

$$H^k(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sum_{\substack{(a_1, a_2, \dots, a_k) \\ a_1 a_2 \dots a_k = n}} \left(f(a_1) f(a_2) \dots f(a_k) \right)}{n^s} \right). \quad (3.40)$$

Um $H^k(s) = \zeta(s)$ zu zeigen, genügt es zu zeigen, dass

$$g(n) := \sum_{\substack{(a_1, a_2, \dots, a_k) \\ a_1 a_2 \dots a_k = n}} \left(f(a_1) f(a_2) \dots f(a_k) \right) = 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \quad (3.41)$$

ist. Da g als Faltung k multiplikativer zahlentheoretischer Funktionen multiplikativ ist, brauchen wir nur noch $g(p^r) = 1$ für alle Primzahlen p und $r \in \mathbb{N}$ zu zeigen, wobei

$$g(p^r) = \sum_{\substack{(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k) \\ \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_k = r}} \left(f(p^{\nu_1}) f(p^{\nu_2}) \dots f(p^{\nu_k}) \right); \forall p \in \mathbb{P}, r \in \mathbb{N} \quad (3.42)$$

Dazu seien p eine (feste) Primzahl und

$$A(x) = 1 + f(p)x + f(p^2)x^2 + \dots + f(p^r)x^r + \dots, \text{ wobei } x \in]-1, 1[\quad (3.43)$$

Die rechte Seite von (3.43) entspricht (wegen (3.38) und (3.39)) genau (vgl. [80, Seite 947]) der Potenzreihenentwicklung von $\frac{1}{\sqrt[k]{1-x}}$ für $x \in]-1, 1[$. Damit ist

$$A(x) = \frac{1}{\sqrt[k]{1-x}}, x \in]-1, 1[\quad (3.44)$$

Aus (3.43) und (3.42) folgt

$$A^k(x) = 1 + g(p)x + g(p^2)x^2 + \dots + g(p^r)x^r + \dots, \text{ wobei } x \in]-1, 1[\quad (3.45)$$

Aus (3.44) ist aber

$$A^k(x) = \frac{1}{1-x} \quad (3.46)$$

(3.45) und (3.46) ergeben

$$\frac{1}{1-x} = 1 + g(p)x + g(p^2)x^2 + \dots + g(p^r)x^r + \dots, \text{ wobei } x \in]-1, 1[\quad (3.47)$$

Die Potenzreihenentwicklung von $\frac{1}{1-x}$ ist aber $1 + x + x^2 + \dots + x^r + \dots$ für $x \in]-1, 1[$. Damit folgt aus (3.47) durch Koeffizientenvergleich $g(p^r) = 1$.

■

Für die zahlentheoretische Funktion f aus Satz 3.7 auf Seite 39 gilt

Satz 3.8 $|f(n)| \leq \left(\frac{1}{k}\right)^{\omega(n)}$, wobei $\omega(n) = \sum_{p|n} 1$ ist.

Beweis $f(1) = 1 = \left(\frac{1}{k}\right)^0$, denn $\omega(1) = 0$.

$f(p) = \frac{1}{k} = \left(\frac{1}{k}\right)^{\omega(p)}$, denn $\omega(p) = 1$.

Für $\nu \geq 2$ und $k \geq 1$ ist

$$\begin{aligned} & f(p^\nu) \\ &= \frac{1}{\nu!} \frac{1}{k} \left(\frac{1}{k} + 1\right) \dots \left(\frac{1}{k} + (\nu - 1)\right) \\ &= \left(\frac{\frac{1}{k} + 0}{1}\right) \left(\frac{\frac{1}{k} + 1}{2}\right) \dots \left(\frac{\frac{1}{k} + (\nu - 1)}{\nu}\right) \\ &\leq \frac{1}{k} \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1}_{(\nu-1) \text{ mal}} \\ &= \frac{1}{k} \\ &= \left(\frac{1}{k}\right)^{\omega(p)} \end{aligned} \quad (3.48)$$

Für zusammengesetztes n betrachtet man die Primfaktorzerlegung⁵ von $n = p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \dots p_r^{\nu_r}$, wobei $\nu_j > 0$ für alle $j \in \{1, 2, \dots, r\}$ ist. Wegen der Multiplikativität von f gilt nun $f(n) = f(p_1^{\nu_1}) f(p_2^{\nu_2}) \dots f(p_r^{\nu_r}) \leq \left(\frac{1}{k}\right)^r = \left(\frac{1}{k}\right)^{\omega(n)}$, denn $\omega(n) = r$. ■

⁵ Ausnahmsweise bedeutet hier p_j **nicht** die j -te Primzahl.

Satz 3.9 $|\zeta(s)| \leq 1 + \frac{1}{|t|} + 2|t|$, für $\sigma \geq \frac{1}{2}$.

Beweis Nach Satz 3.4 auf Seite 30 folgt mit $N=1$ in $\sigma > 1$

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + s \int_1^{\infty} (1 - \langle u \rangle) u^{-s-1} du \quad (3.49)$$

Die Gleichung (3.49) gilt zunächst in $\sigma > 1$ und durch analytische Fortsetzung auch für $\sigma > 0$, da die rechte Seite dort wegen $\int_1^{\infty} u^{-s-1} du < \infty$ regulär ist bis auf die Stelle $s=1$. Man hat für $\sigma \geq \frac{1}{2}$

$$\left| \frac{1}{s-1} \right| \leq \left| \frac{1}{t} \right| \quad (3.50)$$

und

$$\begin{aligned} & \left| s \int_1^{\infty} (1 - \langle u \rangle) u^{-s-1} du \right| \\ & \leq |s| \int_1^{\infty} u^{-\sigma-1} du \\ & \leq \left(\sigma + |t| \right) \frac{1}{\sigma} \\ & = 1 + \frac{|t|}{\sigma} \\ & \leq 1 + 2|t| \end{aligned} \quad (3.51)$$

Aus (3.50) und (3.51) folgt die Ungleichung $|\zeta(s)| \leq 1 + \frac{1}{|t|} + 2|t|$, für $\sigma \geq \frac{1}{2}$

■

Kapitel 4

Ein ”‘klassischer’“ analytischer Beweis des Primzahlsatzes

In diesem Kapitel geben wir eine Version nach NEWMAN des klassischen analytischen Beweises des Primzahlsatzes. Bei dieser Version benutzen wir ganz entscheidend Methoden der komplexen Funktionentheorie. Man spricht daher von einem analytischen Beweis.

Zunächst zeigen wir

Satz 4.1 *Sei $(f_n)_{n=1,2,\dots}$ eine beschränkte Folge komplexer Zahlen und die in $\sigma > 1$ durch die DIRICHLET-Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n n^{-s}$ definierte Funktion F sei in $\sigma \geq 1$ holomorph. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n n^{-s}$ in $\sigma \geq 1$ gegen $F(s)$.*

Beweis ([44, Proof of the convergence theorem]¹) Man fixiere $s_0 \in \mathbb{C}$ mit $\sigma_0 := \operatorname{Re}(s_0) \geq 1$. Dann ist $F(s + s_0)$ jedenfalls in $\sigma_0 := \operatorname{Re}(s_0) \geq 1$ nach

¹Der Satz geht auf INGHAM [27] zurück, der allerdings FOURIER-Theorie zum Beweis benützte, was komplizierter als die hier angewendete Methode der komplexen Integration ist.

Voraussetzung holomorph. Ist $R > 0$ beliebig gewählt, so kann man ein $\delta > 0$ mit $\delta \leq \min\left(1, \frac{R}{\sqrt{2}}\right)$ finden derart, dass das Kreissegment

$$D_{R,\delta} := \{s \in \mathbb{C} : |s| \leq R, \operatorname{Re}(s) \geq -\delta\} \quad (4.1)$$

ganz dem Holomorphiegebiet von $F(s + s_0)$ angehört. Bezeichnet K den einmal in positiven Sinne durchlaufenen Rand von $D_{R,\delta}$ und K_r (bzw. K_l) den in der rechten (bzw. linken) Halbebene $\sigma > 0$ (bzw. $\sigma \leq 0$) gelegenen Teil von K (siehe Abbildung 4.1 auf Seite 44), so gilt nach der CAUCHYSchen Integralformel (Lemma 2.9 auf Seite 25)

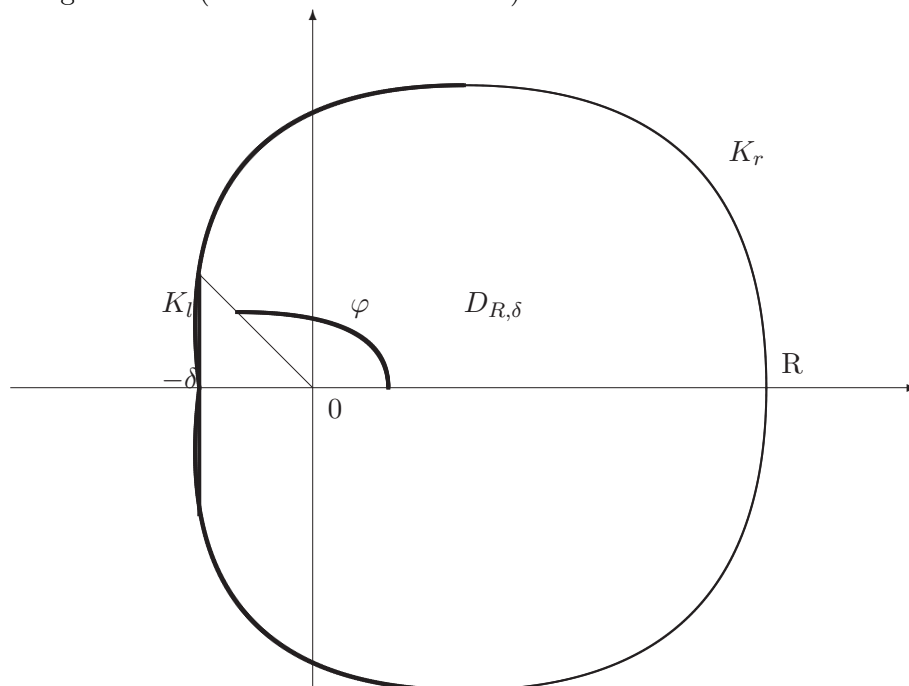


Abbildung 4.1: Illustration des Integrationsweges

$$2\pi i F(s_0) = \int_K F(s + s_0) N^s \left(\frac{1}{s} + \frac{s}{R^2} \right) ds \quad (4.2)$$

Dabei bedeutet N hier und in folgenden eine beliebige natürliche Zahl. Für

$s \in K_r$ ist $\operatorname{Re}(s + s_0) > 1$, also hat man dort

$$F(s + s_0) = \underbrace{\sum_{n \leq N} f_n n^{-s-s_0}}_{Q_N(s+s_0)} + \underbrace{\sum_{n > N} f_n n^{-s-s_0}}_{R_N(s+s_0)} \quad (4.3)$$

Da $Q_N(s + s_0)$ in der ganzen s -Ebene holomorph (weil $n \leq N$) ist, gilt

$$\begin{aligned} & 2\pi i F(s_0) \\ &= \int_{|s|=R} Q_N(s + s_0) N^s \left(\frac{1}{s} + \frac{s}{R^2} \right) ds \\ &= \int_{K_r} Q_N(s + s_0) N^s \left(\frac{1}{s} + \frac{s}{R^2} \right) ds \\ &+ \int_{K_r} Q_N(s + s_0) N^{-s} \left(\frac{1}{s} + \frac{s}{R^2} \right) ds \end{aligned} \quad (4.4)$$

Subtrahiert man (4.4) von (4.2), so entsteht unter Berücksichtigung von (4.3)

$$\begin{aligned} & 2\pi i (F(s_0) - Q_N(s_0)) \\ &= \int_{K_r} (R_N(s + s_0) N^s - Q_N(s_0 - s) N^{-s}) \left(\frac{1}{s} + \frac{s}{R^2} \right) ds \\ &= \int_{|s|=R} Q_N(s + s_0) N^s \left(\frac{1}{s} + \frac{s}{R^2} \right) ds \\ &+ \int_{K_l} F(s + s_0) N^s \left(\frac{1}{s} + \frac{s}{R^2} \right) ds \end{aligned} \quad (4.5)$$

Kann man jetzt zeigen, dass hier die rechte Seite für genügend große N beliebig klein wird, so bedeutet dies die Konvergenz der Partialsummen $Q_N(s_0) = \sum_{n \leq N} f_n n^{-s_0}$ der Reihe $\sum_n f_n n^{-s_0}$ gegen $F(s_0)$, womit dann der Satz bewiesen ist.

Um die Kleinheit der rechten Seite in (4.5) einzusehen, werden einige Abschätzungen benötigt. Zunächst ist

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{s} + \frac{s}{R^2} \\
 & \leq \left| \frac{1}{s} \right| + \left| \frac{s}{R^2} \right| \\
 & = \frac{2}{R} \cos(\arg(s)) \\
 & = \frac{2 \operatorname{Re}(s)}{R^2}
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\text{auf } |s| = R.$$

Auf der in K_l enthaltenen Strecke $s = -\delta + it$, $t \in \mathbb{R}$, $|t| \leq \sqrt{R^2 - \delta^2}$ ist

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{1}{s} + \frac{s}{R^2} \right| \\
 & \leq \left| \frac{1}{s} \right| + \left| \frac{s}{R^2} \right| \\
 & = \frac{1}{\sqrt{\delta^2 + t^2}} + \frac{\sqrt{\delta^2 + t^2}}{R^2} \\
 & = \frac{R^2 + \delta^2 + t^2}{R^2 \sqrt{\delta^2 + t^2}} \\
 & \leq \frac{R^2 + \delta^2 + R^2 - \delta^2}{R^2 \sqrt{\delta^2 + t^2}} \\
 & = \frac{2}{\sqrt{\delta^2 + t^2}} \\
 & \leq \frac{2}{\delta}
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Damit ist

$$\left| \frac{1}{s} + \frac{s}{R^2} \right| \leq \frac{2}{\delta} \quad (4.8)$$

. Bezeichnet $c > 0$ eine obere Schranke für alle $|f_n|$, $n=1, 2, \dots$, so gilt für $s \in K_r$ erstens

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c} |R_N(s + s_0)| \\ & \leq \sum_{n > N} n^{-\sigma-1} \\ & < \int_N^\infty t^{-\sigma-1} dt \\ & = \frac{1}{\sigma N^\sigma}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

und zweitens

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c} |Q_N(s + s_0)| \\ & \leq \sum_{n \leq N} n^{-\sigma-1} \\ & \leq N^\sigma \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{\sigma} \right) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Dabei ist beachtet, dass man für $\sigma \geq 1$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
& \sum_{n \leq N} n^{\sigma-1} \\
&= N^{\sigma-1} + \sum_{n=1}^{N-1} n^{\sigma-1} \\
&< N^{\sigma-1} + \int_0^N t^{\sigma-1} dt \\
&\leq N^{\sigma} \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{\sigma} \right)
\end{aligned} \tag{4.11}$$

hat, während man in $0 < \sigma < 1$ sogar mit

$$\begin{aligned}
& \sum_{n \leq N} n^{\sigma-1} \\
&< \int_0^N t^{\sigma-1} dt \\
&\leq \frac{N^{\sigma}}{\sigma}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

auskommt.

Wegen (4.6), (4.9), (4.10) ist für $s \in K_r$

$$\begin{aligned}
& \left| (R_N(s + s_0)N^s - Q_N(s_0 + s)N^{-s}) \left(\frac{1}{s} + \frac{s}{R^2} \right) \right| \\
&\leq c \left(\frac{1}{N} + \frac{2}{\sigma} \right) \\
&= c \left(4 + \frac{2\sigma}{N} \right) \frac{1}{R^2}
\end{aligned} \tag{4.13}$$

und so gilt für das erste Integral rechts in (4.5)

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{K_r} (R_N(s + s_0)N^s - Q_N(s_0 - s)N^{-s}) \left(\frac{1}{s} + \frac{s}{R^2} \right) ds \right| \\
& \leq 2\pi c \left(\frac{2}{R} + \frac{1}{N} \right)
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Das zweite Integral rechts in (4.5) muss man sehr genau untersuchen. Zunächst werde

$$M := \max\{|F(s + s_0)| : s \in D_{R,\delta}\} \tag{4.15}$$

gesetzt; offenbar hängt M alleine von R und δ ab. Auf dem Teil von K_l mit $\operatorname{Re}(s) = -\delta$ berücksichtigt man $|N^s| = N^{-\delta}$ im Integranden; die Länge dieses Teils des Integrationswegs ist $2\sqrt{R^2 - \delta^2} < 2R$, und so liefert dieser wegen (4.8) höchstens den Beitrag

$$MN^{-\delta} \frac{2}{\delta} 2R = \frac{4MR}{\delta N^\delta} \tag{4.16}$$

zum Absolutbetrag des zweiten Integrals in (4.5). Der Beitrag des in $-\delta < \operatorname{Re}(s) \leq 0$ verlaufenden Teils des Integrationswegs ist wegen (4.6), wenn den in der Abbildung 4.1 auf Seite 44 definierten Winkel bedeutet,

$$\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2} + \varphi} + \int_{\frac{3\pi}{2} - \varphi}^{\frac{3\pi}{2}} \right) F(Re^{i\tau} + s_0) N^{R\cos(\tau) + iR\sin(\tau)} \frac{2\cos(\tau)}{R} iRe^{i\tau} d\tau \tag{4.17}$$

Der Absolutbetrag hiervon ist höchstens

$$2M \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2} + \varphi} + \int_{\frac{3\pi}{2} - \varphi}^{\frac{3\pi}{2}} \right) (\cos(\tau)) N^{R\cos(\tau)} d\tau \tag{4.18}$$

denn

$$M := \max\{|F(s + s_0)| : s \in D_{R,\delta}\} \quad (4.19)$$

Durch die Substitution $y = 2\pi - \tau$ erhalten wir

$$\begin{aligned} & \int_{\frac{3\pi}{2}-\varphi}^{\frac{3\pi}{2}} (-\cos(\tau)) N^{R\cos(\tau)} d\tau \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}+\varphi}^{\frac{\pi}{2}} (-\cos(-y)) N^{R\cos(y)} (-dy) \\ &= - \int_{\frac{\pi}{2}+\varphi}^{\frac{\pi}{2}} (-\cos(y)) N^{R\cos(y)} dy \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+\varphi} (-\cos(y)) N^{R\cos(y)} (-dy) \end{aligned} \quad (4.20)$$

Damit folgt aus (4.18)

$$\begin{aligned}
& 2M \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}+\varphi} + \int_{\frac{3\pi}{2}-\varphi}^{\frac{3\pi}{2}} \right) (\cos(\tau)) N^{R \cos(\tau)} d\tau \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+\varphi} (-\cos(\tau)) N^{R \cos(\tau)} d\tau \\
&\leq 4M \int_0^{\sin(\varphi)} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} N^{-Rx} dx, \text{ mit } x = \cos(\tau) \\
&\leq 4M \int_0^{\sin(\varphi)} N^{Rx} dx \\
&< \frac{4M}{R \log(N)}
\end{aligned} \tag{4.21}$$

falls nur $N > 1$ ist. Hierbei hat man die vorletzte Ungleichung, da $\sin(\varphi) = \frac{\delta}{R} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ nach der Wahl von δ gilt und daher $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \leq 1$ für alle reellen $x \in [0, \sin(\varphi)]$ zutrifft. Aus (4.16) und (4.21) entnimmt man die Abschätzung

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{K_l} (F(s + s_0) N^s \left(\frac{1}{s} + \frac{s}{R^2} \right) ds \right| \\
&\leq \frac{4MR}{\delta N^\delta} + \frac{4M}{R \log(N)}
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Dies mit (4.14) kombiniert ergibt wegen (4.5)

$$|F(s_0) + Q_N(s_0)| \leq \frac{2c}{R} + \frac{c}{N} + \frac{2MR}{\pi \delta N^\delta} + \frac{2M}{\pi R \log(N)} \tag{4.23}$$

Ist nun $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben, so fixiert man etwa $R := \frac{1}{\varepsilon}$ und

wählt anschließend δ (alleine abhängig von ε), so dass es alle von ihm zu Anfang des Beweises verlangten Eigenschaften hat. Wie nach (4.14) festgestellt, hängt dann M lediglich von ε ab. Wegen (4.23) hat man für alle ganzen $N > N_0(\varepsilon) := \max \left(1, \frac{1}{\varepsilon}, \left(\frac{2M}{\pi \delta(\varepsilon)^2} \right)^{\frac{1}{\delta}}, \exp\left(\frac{2M}{\pi}\right) \right)$ die Ungleichung $|F(s_0) - Q_N(s_0)| < 3c\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = (3c+2)\varepsilon$, was den Konvergenzsatz beweist.

■

Satz 4.2 Die Folge $\left(\sum_{p \leq n} \frac{\log(p)}{p} - \log(n) \right)_{n=1,2,\dots}$ konvergiert.

Beweis Setzen wir $a_n := \sum_{p \leq n} \frac{\log(p)}{p}$, dann erhalten wir (wegen Lemma 2.6 auf Seite 24) $a_n = \log(n) + O(1)$, d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ gilt $a_n = O(n^\varepsilon)$. Wegen Satz 3.2 auf Seite 29 definiert die in $\sigma > 1$ absolut konvergente Reihe dort eine holomorphe Funktion $f(s)$. Für diese gilt in $\sigma > 1$, wenn man die Summationsreihenfolge mit Rücksicht auf die vorliegende absolute Konvergenz vertauscht,

$$\begin{aligned} f(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{p \leq n} \frac{\log(p)}{p} n^{-s} \right) \\ &= \sum_p \left(\frac{\log(p)}{p} \sum_{p \leq n} n^{-s} \right) \end{aligned} \quad (4.24)$$

Die letzte innere Summe wird mittels Satz 3.4 auf Seite 30 weiter bearbeitet :

$$\begin{aligned} &\sum_{n=p}^{\infty} n^{-s} \\ &= \frac{1}{s-1} p^{1-s} + s \int_p^{\infty} (1 - \langle u \rangle) u^{-s-1} du \\ &= \frac{p}{s-1} \left(\frac{1}{p^s-1} + g(s) \right) \end{aligned} \quad (4.25)$$

wobei

$$g(s) = \frac{1}{p^s(1-p^s)} + \frac{s(s-1)}{p} \int_p^\infty (1 - <u>) u^{-s-1} du \quad (4.26)$$

Für jede Primzahl p ist die Funktion $g(s)$ in der Halbebene $\sigma > 0$ holomorph; ferner gilt dort die Abschätzung

$$|g(s)| = \frac{1}{p^\sigma(1-p^\sigma)} + \frac{|s|(|s|+1)}{\sigma p^{\sigma+1}} \quad (4.27)$$

Nach (4.24), (4.25), (4.26) ist in $\sigma > 1$

$$\begin{aligned} f(s) &= \frac{1}{s-1} \left(\sum_p \frac{\log(p)}{p^s-1} + \sum_p g(s) \log(p) \right) \\ &= \frac{1}{s-1} \left(\sum_p \frac{\log(p)}{p^s-1} + h(s) \right) \end{aligned} \quad (4.28)$$

wobei $h(s) = \sum_p g(s) \log(p)$ eine in $\sigma > \frac{1}{2}$ holomorphe Funktion ist (wegen 4.27).

Aus Satz 3.4 auf Seite 30 haben wir $\prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \zeta(s)$. Durch logarithmische Differentiation erhalten wir $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = - \sum_p \frac{\log(p)}{p^s-1}$; dies in (4.28) eingetragen führt zu der in $\sigma > 1$ gültigen Formel

$$f(s) = \frac{1}{s-1} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + h(s) \right) \quad (4.29)$$

deren rechte Seite nach Satz 3.5 auf Seite 33 und wegen der Holomorphie von h in $\sigma \geq 1$ holomorph ist bis auf einen doppelten Pol an der Stelle

1. Der Hauptteil der LAURENT-Entwicklung von f um 1 ist wegen (4.29) und Satz 3.5 auf Seite 33 gleich $(s-1)^{-2} + C(s-1)^{-1}$ mit einer gewissen reellen Konstanten C . Mit diesem C definiert man die nun jedenfalls in $\sigma > 1$ holomorphe Funktion

$$\begin{aligned}
 F(s) &:= f(s) + \zeta'(s) - C\zeta(s) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - \log(n) - C) n^{-s} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n n^{-s}
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned}
 f(s) &= a_n - \log(n) - C \\
 &= \sum_{p \leq n} \frac{\log(p)}{p} - \log(n) - C
 \end{aligned} \tag{4.31}$$

beschränkt (Lemma 2.6 auf Seite 24).

In Lemma 4.1 auf Seite 54 werden wir zeigen, dass (f_n) eine Nullfolge ist.

Damit ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p \leq n} \frac{\log(p)}{p} - \log(n) = C$. ■

Lemma 4.1 Die Folge (f_n) aus Satz 4.2 auf Seite 52 ist eine Nullfolge.

Beweis Aus Satz 4.1 auf Seite 43 folgt, dass $\sum_{n=1}^{\infty} f_n n^{-1}$ konvergiert. Wegen dem CAUCHYSchem Konvergenzkriterium für Reihen (Lemma 2.1 auf

Seite 21) gibt es zu beliebigem $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$ eine $N_0 = N_0(\varepsilon) > 0$, so dass für alle ganzen N mit $(1-\varepsilon)N > N_0$ die beiden Ungleichungen < 2 und < 2 gelten.

$$\left| \sum_{N \leq n \leq (1+\varepsilon)N} f_n n^{-1} \right| < \varepsilon^2 \quad (4.32)$$

und

$$\left| \sum_{(1-\varepsilon)N \leq n \leq N} f_n n^{-1} \right| < \varepsilon^2 \quad (4.33)$$

Daraus folgt

$$\sum_{N \leq n \leq (1+\varepsilon)N} f_n n^{-1} < \varepsilon^2 \quad (4.34)$$

und

$$\sum_{(1-\varepsilon)N \leq n \leq N} f_n n^{-1} > -\varepsilon^2 \quad (4.35)$$

Für ganzen n mit $N \leq n \leq (1+\varepsilon)N$ gilt wegen (4.31)

$$f_n = \sum_{p \leq N} \frac{\log(p)}{p} - \log(N) - C \quad (4.36)$$

und

$$f_N = \sum_{p \leq n} \frac{\log(p)}{p} - \log(n) - C \quad (4.37)$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
& f_n - f_N \\
&= \sum_{N < p \leq n} \frac{\log(p)}{p} - \log(n) + \log(N) \\
&= \sum_{N < p \leq n} \frac{\log(p)}{p} + \log\left(\frac{N}{n}\right) \\
&\geq \log\left(\frac{N}{n}\right) \\
&\geq \log\left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right) \\
&\geq -\log(1+\varepsilon) \\
&> \varepsilon
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Damit ist $f_n > f_N - \varepsilon$.

Dies in der Ungleichung (4.34) einsetzen, ergibt

$$(f_N - \varepsilon) \sum_{N \leq n \leq (1+\varepsilon)N} n^{-1} < \varepsilon^2 \tag{4.39}$$

Das heißt

$$f_N - \varepsilon < \frac{\varepsilon^2}{\sum_{N \leq n \leq (1+\varepsilon)N} n^{-1}} \tag{4.40}$$

Aber

$$\begin{aligned}
& \sum_{N \leq n \leq (1+\varepsilon)N} n^{-1} \\
&= \frac{1}{N} + \frac{1}{N+1} + \cdots + \frac{1}{(1+\varepsilon)N} \\
&\geq \frac{1}{(1+\varepsilon)N} + \frac{1}{(1+\varepsilon)N} + \cdots + \frac{1}{(1+\varepsilon)N} \\
&= \frac{1 + [(1+\varepsilon)N - N + 1]}{(1+\varepsilon)N} \\
&> \frac{(1+\varepsilon)N - N}{(1+\varepsilon)N} \text{ denn } (1+\varepsilon)N < [(1+\varepsilon)N] + 1 \\
&= \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Damit ist

$$\sum_{N \leq n \leq (1+\varepsilon)N} n^{-1} > \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \tag{4.42}$$

und daraus

$$\frac{1}{\sum_{N \leq n \leq (1+\varepsilon)N} n^{-1}} < \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \tag{4.43}$$

(4.43) in (4.40) einsetzen ergibt

$$f_N - \varepsilon < \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \varepsilon^2 \tag{4.44}$$

und daraus $f_N - \varepsilon < (1+\varepsilon)\varepsilon < 1,5\varepsilon$, weil $\varepsilon < \frac{1}{2}$. Also

$$f_N < \varepsilon + 1,5\varepsilon = 2,5\varepsilon, \text{ , wenn nur } N > N_0 \text{ gilt.} \tag{4.45}$$

Andererseits gilt für die ganzen n mit $(1 - \varepsilon)N \leq n < N$ wegen (4.31)

$$f_n = \sum_{p \leq n} \frac{\log(p)}{p} - \log(n) - C$$

$$\text{und } f_N = \sum_{p \leq N} \frac{\log(p)}{p} - \log(N) - C$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} f_n - f_N &= \sum_{n < p \leq N} \frac{\log(p)}{p} - \log(n) + \log(N) \\ &= - \sum_{n < p \leq N} \frac{\log(p)}{p} + \log\left(\frac{N}{n}\right) \\ &\leq \log\left(\frac{N}{n}\right) \\ &\leq \log\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right) \\ &= -\log(1 - \varepsilon) \\ &< 2\varepsilon \text{ weil } \varepsilon < \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{4.46}$$

Damit ist $f_n < f_N + 2\varepsilon$.

Dies in der Ungleichung (4.35) eingesetzt, ergibt $(f_N + 2\varepsilon) \sum_{(1-\varepsilon)N < n \leq N} \frac{1}{n} > -\varepsilon^2$. Das heißt

$$f_N + 2\varepsilon > - \frac{\varepsilon^2}{\sum_{(1-\varepsilon)N < n \leq N} \frac{1}{n}} \tag{4.47}$$

Analog zu (4.43) gilt

$$\begin{aligned}
& \sum_{(1-\varepsilon)N < n \leq N} \frac{1}{n} \\
& > \frac{N - [(1-\varepsilon)N]}{N} \\
& \leq \frac{N - (1-\varepsilon)N}{N} \\
& = \varepsilon
\end{aligned} \tag{4.48}$$

Damit ist $\frac{-\varepsilon^2}{\sum_{(1-\varepsilon)N < n \leq N} \frac{1}{n}} > \frac{-\varepsilon^2}{\varepsilon} = -\varepsilon$

und daraus $\frac{1}{\sum_{(1-\varepsilon)N < n \leq N} \frac{1}{n}} < \frac{1}{\varepsilon}$

Dies in (4.47) eintragen ergibt $f_N + 2\varepsilon > -\varepsilon$, also

$$f_N > -3 - \varepsilon \text{ falls nur } N > N_0 \text{ gilt.} \tag{4.49}$$

Wegen (4.45) und (4.49) hat man $|f_N| < 3\varepsilon$ für $N > N_0$ und so ist (f_N) als Nullfolge erkannt.

■

Schließlich beweisen wir

Satz 4.3 Die Konvergenz der Folge $\left(\sum_{p \leq n} \frac{\log(p)}{p} - \log(n) \right)_{n=1,2,\dots}$ impliziert den Primzahlsatz.

Beweis Setzt man $A(x) := \sum_{p \leq x} \frac{\log(p)}{p}$ für reelles positives x und konvergiert $\left(\sum_{p \leq n} \frac{\log(p)}{p} - \log(n) \right)_{n=1,2,\dots}$ gegen c , so folgt wegen $\log\left(\frac{[x]}{x}\right) = \log\left(1 - \frac{x - [x]}{x}\right) = O\left(\frac{1}{x}\right)$ für $x \rightarrow \infty$

$$A(x) - \log(x) - c = A([x]) - \log([x]) - c + O\left(\frac{1}{x}\right) = o(1). \tag{4.50}$$

Daher strebt die Funktion $A(x) - \log(x)$ der reellen Variablen x bei $x \rightarrow \infty$

gegen c. Mit einer geeigneten Funktion $\varepsilon :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, die $\lim_{x \rightarrow \infty} \varepsilon(x) = 0$ erfüllt, erhalten wir

$$A(x) = \log(x) + c + \varepsilon(x), \text{ für } x > 0. \quad (4.51)$$

Nach Lemma 2.3 auf Seite 23 über partielle Summation ist dann

$$\begin{aligned} \pi(x) &= \sum_{p \leq x} \frac{\log(p)}{p} \frac{p}{\log(p)} \\ &= A(x) \frac{x}{\log(x)} \int_2^x A(u) \frac{1 - \log(u)}{\log^2(u)} du \end{aligned} \quad (4.52)$$

Mit Hilfe von (4.51) erhalten wir

$$\begin{aligned} &A(x) \frac{x}{\log(x)} \\ &= (\log(x) + c + \varepsilon(x)) \frac{x}{\log(x)} \\ &= x + \frac{cx}{\log(x)} + \frac{x \cdot \varepsilon(x)}{\log(x)} \end{aligned} \quad (4.53)$$

und

$$\begin{aligned}
& \int_2^x A(u) \frac{1-\log(u)}{\log^2(u)} du \\
&= \int_2^x (\log(u) + c + \varepsilon(u)) \frac{1-\log(u)}{\log^2(u)} du \\
&= \int_2^x \frac{1-\log(u)}{\log(u)} du + c \int_2^x \frac{1-\log(u)}{\log^2(u)} du + \int_2^x \varepsilon(u) \frac{1-\log(u)}{\log^2(u)} du \quad (4.54) \\
&= \int_2^x \frac{1}{\log(u)} du - \int_2^x du + c \int_2^x \frac{1-\log(u)}{\log^2(u)} du + \int_2^x \varepsilon(u) \frac{1-\log(u)}{\log^2(u)} du \\
&= \int_2^x \frac{1}{\log(u)} du - (x-2) + c \left(\frac{2}{\log(2)} - \frac{x}{\log(x)} \right) + \int_2^x \varepsilon(u) \frac{1-\log(u)}{\log^2(u)} du
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
& \int_2^x A(u) \frac{1-\log(u)}{\log^2(u)} du \\
&= \int_2^x \frac{1}{\log(u)} du - (x-2) + c \left(\frac{2}{\log(2)} - \frac{x}{\log(x)} \right) + \int_2^x \varepsilon(u) \frac{1-\log(u)}{\log^2(u)} du \quad (4.55)
\end{aligned}$$

Wegen (4.53) und (4.55) folgt aus (4.52)

$$\begin{aligned}
& \pi(x) \\
&= \int_2^x \frac{du}{\log(u)} + 2 + \frac{2c}{\log(2)} + \frac{x\varepsilon(x)}{\log(x)} + \int_2^x \varepsilon(u) \frac{1-\log(u)}{\log^2(u)} du \quad (4.56)
\end{aligned}$$

Wird nun $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben, so ist $|\varepsilon(u)| \leq \varepsilon$ für alle u oberhalb eines $x_0(\varepsilon)$, das o. B. d. A. schon größer als e sein² möge; Das letzte Integral in (4.56) ist absolut beschränkt durch

² $e=2,718\ 281\ 828 \dots$ sei die EULERSche Zahl.

$$\left| \int_2^x \varepsilon(u) \frac{1 - \log(u)}{\log^2(u)} du \right| + \varepsilon \left(\frac{x}{\log(x)} - \frac{2}{\log(2)} \right) \quad (4.57)$$

Aus (4.56) folgt damit

$$\pi(x) = li(x) + o\left(\frac{x}{\log(x)}\right) \quad (4.58)$$

Außerdem folgt mittels partiellen Integration für $x > 1$

$$li(x) - li(2) = \int_2^x 1 \cdot \frac{1}{\log(u)} du \quad (4.59)$$

$$(4.60)$$

$$= \frac{x}{\log(x)} - \frac{2}{\log(2)} + \int_2^x \frac{du}{\log^2(u)} \quad (4.61)$$

und daraus

$$\frac{li(x)}{\frac{x}{\log(x)}} = 1 + \left(li(2) - \frac{2}{\log(2)} \right) \frac{\log(x)}{x} + \frac{\log(x)}{x} \int_2^x \frac{du}{\log^2(u)} \quad (4.62)$$

Nun ist für $x \geq 4$

$$\begin{aligned}
0 &< \int_2^x \frac{du}{\log^2(u)} \\
&= \int_2^{\sqrt{x}} \frac{du}{\log^2(u)} + \int_{\sqrt{x}}^x \frac{du}{\log^2(u)} \\
&< \int_2^{\sqrt{x}} \frac{du}{\log^2(2)} + \int_{\sqrt{x}}^x \frac{du}{\log^2(\sqrt{x})} \\
&= \frac{\sqrt{x}-2}{\log^2(2)} + \frac{x-\sqrt{x}}{\frac{1}{4}\log^2(x)} \\
&< \frac{\sqrt{x}}{\log^2(2)} + \frac{4x}{\log^2(x)}
\end{aligned} \tag{4.63}$$

folglich

$$\begin{aligned}
0 &< \frac{x}{\log(x)} \int_2^x \frac{du}{\log^2(u)} \\
&< \frac{\log(x)}{\sqrt{x} \log^2(2)} + \frac{x}{\log(x)}
\end{aligned} \tag{4.64}$$

Damit ist der Grenzwert von $\frac{x}{\log(x)} \int_2^x \frac{du}{\log^2(u)}$ gleich 0 bei $x \rightarrow \infty$, so dass sich aus (4.62)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{li(x)}{\frac{x}{\log(x)}} = 1 \tag{4.65}$$

ergibt, was zu

$$li(x) \sim \frac{x}{\log(x)} \tag{4.66}$$

führt.

Kombiniert man (4.62) und (4.66), so erhält man

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log(x)} \tag{4.67}$$

■

Kapitel 5

Eine Idee von Wolke zum Beweis des Primzahlsatzes

Bei einigen Variante des analytischen Beweis des Primzahlsatzes versucht man u. a., $\left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right|$ für $Re(s) := \sigma > 1$ abzuschätzen, um das Integral über $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ zu berechnen. Anstelle von $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ kann man aber auch die Funktion $\sqrt[k]{\zeta}$ mit ”‘großen’” k betrachten. Diese Idee geht auf WOLKE [88] zurück.

Wir stellen diese Idee kurz vor.

Unser Ziel ist zu zeigen, dass

$$\pi(x) = li(x) + O\left(x \exp\left(-c_1 \sqrt{\log(x)}\right)\right) \quad (5.1)$$

gilt, unter der Voraussetzung eines Nullstellenfreien Gebietes:

$$\begin{aligned} \zeta(\sigma + it) &\neq 0 \\ \text{für} \quad \sigma &\geq \max\left(1 - c_2, 1 - \frac{c_3}{\log(2+|t|)}\right) \end{aligned} \quad (5.2)$$

(siehe Satz 3.6 auf Seite 37).

Dazu setzen wir für hinreichend großes x

$$k = \exp\left(c_4 \sqrt{\log(x)}\right), \quad (5.3)$$

wobei $c_4 > 0$ später geeignet festgelegt wird.

Aus Satz 3.7 auf Seite 39 können¹ wir für $\sigma > 1$ $\sqrt[k]{\zeta(s)} : \sum_n \frac{f(n)}{n^s}$ definieren, wobei f multiplikativ mit

$$\begin{aligned} f(p) &= \frac{1}{k} \\ f(p^\nu) &= \frac{1}{\nu!} \frac{1}{k} \left(\frac{1}{k} + 1\right) \dots \left(\frac{1}{k} + (\nu - 1)\right) \end{aligned}$$

Das heißt, es ist $|f(n)| \leq \left(\frac{1}{k}\right)^{\omega(n)}$, wobei $\omega(n) = \sum_{p|n} 1$ (siehe Satz 3.8 auf Seite 41).

Damit erhält man:

$$\pi(x) = k \sum_{n \leq x} f(n) + O\left(\frac{x}{k}\right). \quad (5.4)$$

Aus der PERRONSchen Umkehrformel (siehe Lemma 5.1 auf Seite 69 am Ende dieses Kapitels) und mit hinreichend großem $T \in [2, x]$ sowie $\varepsilon = \frac{1}{\log(x)}$ erhalten wir

$$\sum_{n \leq x} f(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{1+\varepsilon-iT}^{1+\varepsilon+iT} \sqrt[k]{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x}{T} \log(x)\right). \quad (5.5)$$

Wir setzen

$$\delta = \frac{c_3}{2 \log(2+T)} \quad (5.6)$$

und erhalten mit (5.2)

¹ $\sqrt[k]{\zeta(s)}$ ist die eindeutige analytische Fortsetzung beginnend mit der reellwertigen Funktion $\sqrt[k]{\zeta(\sigma)}$ für $\sigma > 1$

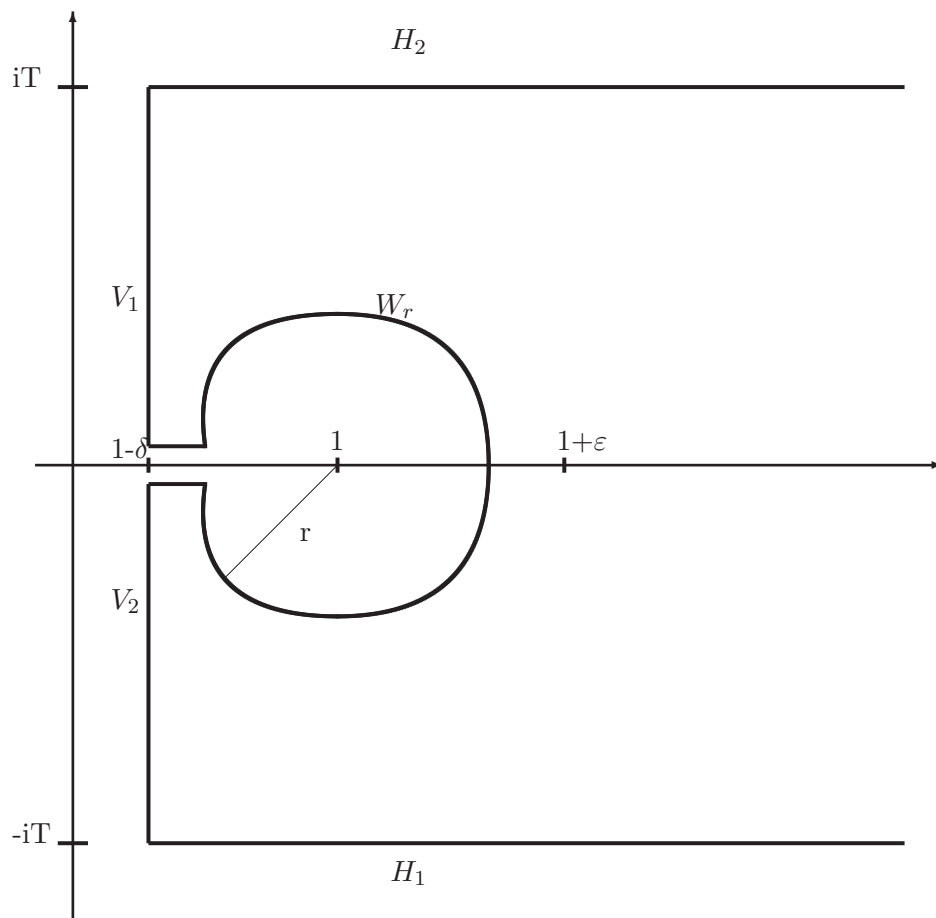


Abbildung 5.1: Illustration des Integrationsweges

$$\sum_{n \leq x} f(n) = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{W_r} + \int_{H_1+H_2} + \int_{V_1+V_2} \right) \sqrt[k]{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x}{T} \log(x)\right). \quad (5.7)$$

Dabei ist: (siehe Abbildung 5.1 auf Seite 67)

- H_1 die Horizontale von $1 + \varepsilon - iT$ nach $1 - \delta - iT$,
- H_2 die Horizontale von $1 - \delta + iT$ nach $1 + \varepsilon + iT$
- V_1 die Vertikale von $1 - \delta - iT$ nach $1 - \delta - i \cdot 0$
- V_2 die Vertikale von $1 - \delta - i \cdot 0$ nach $1 - \delta + iT$
- W_r der folgende Weg: Man laufe horizontal von $\sigma = 1 - \delta$ nach $1-r$ (r hinreichend klein), umrunde $s=1$ auf einem Kreis vom Radius r und laufe auf den oberen Ufer des Schnittes von $1-r$ nach $1 - \delta$.

Wegen der Abschätzung

$$|\zeta(s)| \leq 1 + \frac{1}{|t|} + 2|t| \text{ für } \sigma \geq \frac{1}{2} \text{ (siehe Satz 3.9 auf Seite 42)}$$

ist der Beitrag dieser Wege zu (5.7) $< x^{1-\delta} \log(x) + \frac{x}{T}$.

Auf W_r gilt

$$\sqrt[k]{\zeta(s)} \sqrt[k]{s-1} = \sum_{\nu \geq 1} \binom{\frac{1}{k}}{\nu} \left((s-1) \log(s) \right)^\nu \quad (5.8)$$

wobei g auf W_r holomorph und durch ein c_5 beschränkt ist. Wir berechnen den Beitrag des konstanten Terms in (5.8). Da das Integral über den Kreis für $r \rightarrow 0$ verschwindet, ergibt sich

$$\begin{aligned} & J_0 \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{W_r} \frac{x^s}{s \sqrt[k]{s-1}} ds \\ &= \frac{2i}{2\pi i} \sin \frac{\pi}{k} \int_0^\delta \frac{x^{1-t} t^{-\frac{1}{k}}}{1-t} dt \end{aligned} \quad (5.9)$$

Durch Aufspalten des Integrals bei $\frac{1}{x}$ sieht man, dass der Faktor $t^{\frac{1}{k}}$ vernachlässigt werden kann, und man erhält

$$\begin{aligned}
 J_0 &= \frac{1}{k} \left(1 + O\left(\frac{\log(x)}{T}\right) \right) \int_0^\delta \frac{x^{1-t}}{1-t} dt \\
 &= \frac{1}{k} \left(1 + O\left(\frac{\log(x)}{T}\right) \right) \int_{x^{1-\delta}}^x \frac{1}{\log(t)} dt \\
 &= \frac{li(x)}{k} + O\left(\frac{x}{k^2} + \frac{x^{1-\delta}}{k}\right)
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

Analog überzeugt man sich, dass der Beitrag der übrigen Terme in (5.8) im obigen Fehlerglied $O\left(\frac{x}{k^2} + \frac{x^{1-\delta}}{k}\right)$ aufgeht.

Zusammenfassend erhalten wir

$$\pi(x) = li(x) + O\left(\frac{x}{k} + x^{1-\delta} k \log(x) + \frac{x}{T} k \log(x)\right) \tag{5.11}$$

Setzen wir schließlich $T + 2 = k^{c_6}$ mit hinreichend großem $c_6 > 0$, so lässt sich bei richtiger Wahl von c_4 und c_6 der Fehler in (5.11) durch $O\left(x \exp\left(-c_1 \sqrt{\log(x)}\right)\right)$ mit $c_1 = c_1(c_3) > 0$ abschätzen. Damit haben wir (5.1) aus (5.2) hergeleitet, was zu zeigen war. ■

Lemma 5.1 [PERRONschen Umkehrformel] Sei $f(s) = \sum_n a_n n^{-s}$. Die Reihe sei für $\sigma > 1$ absolut konvergent und $|a_n| < c\Phi(n)$ mit $c > 0$ und für große x monoton wachsendem positivem $\Phi(x)$.

$$\sum_n |a_n| n^{-\sigma} = (\sigma - 1)^\alpha, \quad \alpha > 0 \text{ für } \sigma \rightarrow 1 + 0 \tag{5.12}$$

Sei weiter $w = u + iv$ beliebig, $b > 0$, $u + b > 1$, $T > 0$. Für nicht ganzes $x > 1$ gilt

$$\begin{aligned}
\sum_n a_n n^{-w} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} f(w+s) \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x^b}{T(u+b-1)^\alpha}\right) \\
&\quad + O\left(\frac{\Phi(2x)x^{1-u} \log(2x)}{T}\right) + O\left(\frac{\Phi(2x)x^{1-u}}{T|x-N|}\right)
\end{aligned} \tag{5.13}$$

wobei N die an x nächstgelegene natürliche Zahl ist.

Beweis [51, Seite 376, Satz 3.1 Anhang] ■

Kapitel 6

Ein Beweis des Primzahlsatzes nach Newman

In [44] gab NEWMAN zwei kürzere Beweise für den Primzahlsatz. Der eine Beweis [44, Second Proof of the Prime Number Theorem] entspricht (im wesentlichen) unserem Beweis aus Kapitel 4, wobei unser Beweis ausführlicher war. Der andere Beweis ist ziemlich kurz. Dafür ist der gewonnene Satz ”‘nur’” von der Form $\pi(x) \sim \frac{x}{\log(x)}$, also ohne Restglied. Bei diesem Beweis geht NEWMAN von der elementaren Äquivalenz¹ zwischen dem Primzahlsatz und der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n}$ aus. Wir brauchen also nur noch die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n}$ zu zeigen.

Lemma 6.1 *In der Halbebene $\sigma \geq 1$ gilt $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)}$, wobei μ die MÖBIUS-Funktion ist.*

¹Im Jahre 1899 entdeckte LANDAU, dass $\sum \frac{\mu(n)}{n}$ mittels elementarer Methoden aus dem Primzahlsatz ableitbar ist. 1911 zeigte LANDAU ergänzend, dass auch umgekehrt der Primzahlsatz aus $\sum \frac{\mu(n)}{n}$ mit elementaren Methoden folgt. (vgl. [9, Seite 315]).

Beweis Die MÖBIUS-Funktion $\mu : \mathbb{N} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ ist

$$\mu(n) := \begin{cases} 1, & \text{falls } n=1, \\ (-1)^k, & \text{falls } n \text{ Produkt von} \\ & k \text{ verschiedenen Primzahlen ist,} \\ 0, & \text{falls } p^2 | n \text{ mit } p \text{ prim} \end{cases} \quad (6.1)$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\mu(n)}{n^s} \right| \\ & \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^s} \right| \\ & < \infty \text{ für } \operatorname{Re}(s) > 1. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Aus Lemma 2.2 auf Seite 23 (angewandt auf die multiplikative zahlen-theoretische Funktion $f(n) = \frac{\mu(n)}{n^s}$) folgt

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} \\ & = \prod_p \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\mu(p^r)}{p^{rs}} \text{ für } \operatorname{Re}(s) > 1. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Da

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{\mu(p^r)}{p^{rs}} = 1 - p^{-s}, \quad (6.4)$$

weil

$$\mu(p^r) = 0 \text{ für } r > 1, \quad (6.5)$$

gilt

$$\begin{aligned} & \prod_p \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\mu(p^r)}{p^{rs}} \\ & = \prod_p (1 - p^{-s}) \text{ für } \operatorname{Re}(s) > 1. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Aus (6.3) und (6.6) erhalten wir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \prod_p (1 - p^{-s}) \text{ für } \operatorname{Re}(s) > 1. \quad (6.7)$$

Das heißt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)} \text{ für } \operatorname{Re}(s) > 1. \quad (6.8)$$

Die Funktion $\frac{1}{\zeta(s)}$ ist nach Satz 3.5 auf Seite 33 in $\operatorname{Re}(s) = \sigma \geq 1$ holomorph; nach Satz 4.1 auf Seite 43 konvergiert also $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$ in $\sigma \geq 1$ gegen $\frac{1}{\zeta(s)}$. ■

Korollar $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} = 0.$

Kapitel 7

Numerische Berechnung von

$\pi(x)$

Die praktische Bestimmung von $\pi(x)$ für größere x ist nur mühsam zu bekommen. Die MINÁČsche Formel

$$\pi(x) = \sum_{j=2}^n \left[\frac{(j-1)! + 1}{j} - \left\lfloor \frac{(j-1)!}{j} \right\rfloor \right], \quad n \in \mathbb{N} \quad (7.1)$$

ist zwar (fast) offensichtlich¹, aber (leider) praktisch wertlos, denn sie ist nur für nicht allzu große Zahlen nützlich, für sehr große Zahlen ist sie weniger (bzw. überhaupt nicht) geeignet. In diesem Kapitel stellen wir einige praktikable Rechenverfahren vor, um $\pi(x)$ für große x zu berechnen. Die meisten dieser Verfahren basieren auf dem Sieb² des ERATOSTHENES. Es beruht auf der Tatsache, dass eine natürliche Zahl $n > 1$, die keinen **Primteiler** $p \leq \sqrt{n}$ besitzt, prim ist; ist nämlich $n = d_1 d_2$, so ist $d_1 \leq \sqrt{n}$ oder $d_2 \leq \sqrt{n}$. Das Sieb des ERATOSTHENES arbeitet folgendermaßen: Man

¹Die MINÁČsche Formel kann mit Hilfe von WILSON-Satz leicht bewiesen werden (einen ausführlichen Beweis findet man in [57, Seite 181]).

²Das bekannte Sieb des ERATOSTHENES wurde durch die Introductio Arithmetica des NIKOMACHOS von GERASA (um 100 n. Chr.) überliefert.

schreibt alle Zahlen zwischen 2 und x auf, streiche die Vielfache der ersten Primzahl 2, außer 2, dann die Vielfachen der nächsten (nicht gestrichenen) Primzahl (diese ist 3) außer dieser, usw. bis zur größten Primzahl $\leq \sqrt{x}$. Die übrigbleibenden Zahlen sind genau die Primzahlen, die kleiner als x sind. Man erhält somit bei einem Speicherbedarf von x Zellen und einem Rechenaufwand von

$$\sum_{p \leq \sqrt{x}} \frac{x}{p} = x \log(\log(x)) + O(x) \quad (7.2)$$

Rechenschritten alle Primzahlen bis x . Man vgl. auch die von P. PRITCHARD [52, 53] stammenden Verbesserungen dieser Methode.

7.1 Legendre–Methode

Nach dem Sieb des ERATOSTHENES sind die $[x]$ Zahlen aus $[1, x]$ genau die folgenden Zahlen:

- Die Zahl 1, das ist eine Zahl.
- Die Primzahlen $p \leq \sqrt{x}$, das sind $\pi(\sqrt{x})$ Primzahlen.
- Die Vielfachen dieser ersten $\pi(\sqrt{x})$ Primzahlen, außer dieser. Das sind nach dem LEGENDRESchen Inklusions–Exklusions–Prinzip genau

$$\left(\sum_{p_\alpha \leq \sqrt{x}} \left[\frac{x}{p_\alpha} \right] \right. \quad (7.3)$$

$$(7.4)$$

$$- \sum_{p_\alpha < p_\beta \leq \sqrt{x}} \left[\frac{x}{p_\alpha p_\beta} \right] \quad (7.5)$$

$$(7.6)$$

$$+ \sum_{p_\alpha < p_\beta < p_\lambda \leq \sqrt{x}} \left[\frac{x}{p_\alpha p_\beta p_\lambda} \right] \quad (7.7)$$

$$(7.8)$$

$$\pm \dots) - \pi(\sqrt{x}) \quad (7.9)$$

zusammengesetzte Zahlen mit mindestens einem Primteiler $p \leq \sqrt{x}$

- Die Primzahlen $> \sqrt{x}$, das sind genau $\pi(x) - \pi(\sqrt{x})$ Zahlen.

Daraus erhalten wir

$$\begin{aligned} [x] = & 1 + \pi(\sqrt{x}) + \left(\sum_{p_\alpha \leq \sqrt{x}} \left[\frac{x}{p_\alpha} \right] \right. \\ & - \sum_{p_\alpha < p_\beta \leq \sqrt{x}} \left[\frac{x}{p_\alpha p_\beta} \right] \\ & + \sum_{p_\alpha < p_\beta < p_\lambda \leq \sqrt{x}} \left[\frac{x}{p_\alpha p_\beta p_\lambda} \right] \\ & \left. \pm \dots \right) - \pi(\sqrt{x}) + \pi(x) - \pi(\sqrt{x}) \end{aligned} \quad (7.10)$$

Aus (7.10) folgt unmittelbar die LEGENDRE-Formel

$$\begin{aligned} \pi(x) = & \pi(\sqrt{x}) - 1 + \left([x] - \sum_{p_\alpha \leq \sqrt{x}} \left[\frac{x}{p_\alpha} \right] \right. \\ & + \sum_{p_\alpha < p_\beta \leq \sqrt{x}} \left[\frac{x}{p_\alpha p_\beta} \right] \\ & - \sum_{p_\alpha < p_\beta < p_\lambda \leq \sqrt{x}} \left[\frac{x}{p_\alpha p_\beta p_\lambda} \right] \\ & \left. \mp \dots \right) \end{aligned} \quad (7.11)$$

Wir benutzen nun Formel (7.11), um $\pi(100)$ zu bestimmen:

$$\begin{aligned}
& \pi(100) \\
= & \pi(10) - 1 + 100 \\
& - \left(\left[\frac{100}{2} \right] + \left[\frac{100}{3} \right] + \left[\frac{100}{5} \right] + \left[\frac{100}{7} \right] \right) \\
& + \left(\left[\frac{100}{2 \cdot 3} \right] + \left[\frac{100}{2 \cdot 5} \right] + \left[\frac{100}{2 \cdot 7} \right] \right. \\
& + \left. \left[\frac{100}{3 \cdot 5} \right] + \left[\frac{100}{3 \cdot 7} \right] + \left[\frac{100}{5 \cdot 7} \right] \right) \\
& - \left(\left[\frac{100}{2 \cdot 3 \cdot 5} \right] + \left[\frac{100}{2 \cdot 3 \cdot 7} \right] + \left[\frac{100}{2 \cdot 5 \cdot 7} \right] \right. \\
& + \left. \left[\frac{100}{3 \cdot 5 \cdot 7} \right] \right) \\
& + \left[\frac{100}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} \right] \\
= & 4 - 1 + 100 - (50 + 33 + 20 + 14) \\
& + (16 + 10 + 7 + 6 + 4 + 2) - (3 + 2 + 1 + 0) + 0 \\
= & 4 - 1 + 100 - 117 + 45 - 6 + 0 \\
= & 25.
\end{aligned}$$

LEGENDRE [35] gab 78 526 als Wert von $\pi(10^6)$ an. Allerdings ist der richtige Wert 78 498. Zu LEGENDRES Verteidigung erwähnen wir aber, dass zu seiner Zeit die umfangreichste Primzahltafel 78 492 Primzahlen gehabt hat [60, Seite 11]. Um mit der Formel (7.11) etwa $\pi(x)$ für $x > 10^8$ zu berechnen, müßte man mehr als $2^{\pi(10^4)} = 2^{1229} > 10369$ Summanden in der Summe

$$\begin{aligned}
& \phi(x, \pi(\sqrt{x})) \\
:= & \left([x] - \sum_{p_\alpha \leq \sqrt{x}} \left[\frac{x}{p_\alpha} \right] \right. \\
& + \sum_{p_\alpha < p_\beta \leq \sqrt{x}} \left[\frac{x}{p_\alpha p_\beta} \right] \\
& - \sum_{p_\alpha < p_\beta < p_\lambda \leq \sqrt{x}} \left[\frac{x}{p_\alpha p_\beta p_\lambda} \right] \\
& \mp \dots \left. \right)
\end{aligned} \tag{7.12}$$

auf der rechten Seite von (7.11) berücksichtigen - der Rechenaufwand hierfür wäre auch auf schnellsten Maschinen nicht zu bewältigen. Die Schwachstelle der Formel (7.11) ist offensichtlich die enorm große Anzahl der Summanden der Summe $\phi(x, \pi(\sqrt{x}))$ auf die rechte Seite. Lässt sich diese Summe anders schreiben und effizient berechnen? Als nächstens stellen wir Verfahren vor, die versuchen, diese Schwachstelle zu verbessern.

7.2 Meissel–Methode

Der Astronom MEISSEL [42, 43] konnte auf der Grundlage des Siebes des ERATOSTHENES ein praktikables Rechenverfahren ausarbeiten, um $\pi(x)$ für große x zu berechnen. MEISSEL gab 1871 den Wert $\pi(10^8)$ und 1885 [43] den Wert für $\pi(10^9)$. Allerdings war der Wert von $\pi(10^9)$ fehlerhaft, genauer gesagt um 56 niedriger als der richtige Wert 50 847 534. Dieser Fehler blieb länger³ Zeit (über 70 Jahren) in der Literatur unbemerkt, erst 1958 konnte LEHMER [37] den Fehler entdecken und korrigieren. Wir behandeln nun die MEISSEL–Methode. MEISSEL hat die LEGENDRE–Formel (7.11) so modifiziert, dass er effizient $\pi(x)$ für größere x berechnen konnte. MEISSEL betrachtete die ersten a Primzahlen (die Zahl a wird später geeignet festge-

³In [60, Seite 11] ist dieser Fehler folgendermaßen beschrieben : "...this is probably the most often quoted faulty value in the literature on primes."

legt) und nutzte die Tatsache aus, dass die $[x]$ natürlichen Zahlen in $[1, x]$ genau die folgenden sind:

- Die Zahl 1, das ist eine Zahl.
- Die ersten a Primzahlen, $p_1 = 2, p_2 = 3, \dots, p_a$.
- Die

$$\begin{aligned}
 & \left(\sum_{p_\alpha \leq p_a} \left[\frac{x}{p_\alpha} \right] \right. \\
 & - \sum_{p_\alpha < p_\beta \leq p_a} \left[\frac{x}{p_\alpha p_\beta} \right] \\
 & + \sum_{p_\alpha < p_\beta < p_\lambda \leq p_a} \left[\frac{x}{p_\alpha p_\beta p_\lambda} \right] \\
 & \left. \pm \dots - a \right)
 \end{aligned} \tag{7.13}$$

zusammengesetzten Zahlen mit mindestens einem Primteiler $\leq p_a$.

- Die $P_1(x, a) = (\pi(x) - a)$ Primzahlen p mit $p_a < p \leq x$.
- Die $P_2(x, a)$ Zahlen $n = p_\alpha p_\beta \leq x$ mit $a + 1 \leq \alpha \leq \beta$.
- Die $P_3(x, a)$ Zahlen $n = p_\alpha p_\beta p_\lambda \leq x$ mit $a + 1 \leq \alpha \leq \beta \leq \lambda$.
- ...
- ...
- $P_k(x, a)$ Zahlen $\leq x$, deren Primfaktorzerlegung genau aus k Primzahlen (nicht notwendigerweise verschieden) $p \geq p_{a+1}$ besteht.
- ...
- ...

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
 & 1 + a + \left(\sum_{1 \leq \alpha \leq a} \left[\frac{x}{p_\alpha} \right] \right. \\
 & - \sum_{1 \leq \alpha < \beta \leq a} \left[\frac{x}{p_\alpha p_\beta} \right] \\
 & + \sum_{1 \leq \alpha < \beta < \lambda \leq a} \left[\frac{x}{p_\alpha p_\beta p_\lambda} \right] \\
 & \left. \pm \dots - a \right) + \pi(x) - a + P_2(x, a) + P_3(x, a) + \dots = [x]
 \end{aligned} \tag{7.14}$$

Das heißt

$$\begin{aligned}
 \pi(x) = & [x] - \left(\sum_{1 \leq \alpha \leq a} \left[\frac{x}{p_\alpha} \right] \right. \\
 & - \sum_{1 \leq \alpha < \beta \leq a} \left[\frac{x}{p_\alpha p_\beta} \right] \\
 & + \sum_{1 \leq \alpha < \beta < \lambda \leq a} \left[\frac{x}{p_\alpha p_\beta p_\lambda} \right] \\
 & \left. \pm \dots \right) + a - 1 - \left(P_2(x, a) + P_3(x, a) + \dots \right)
 \end{aligned} \tag{7.15}$$

Um $P_1(x, a)$, $P_2(x, a)$, $P_3(x, a)$, ... besser verstehen zu können, geben wir ein numerisches Beispiel an. Mit $a=2$ sind die 900 Zahlen in $[1, 900]$ genau die Zahlen:

- Die Zahl 1, das ist eine Zahl.
- Die ersten $a=2$ Primzahlen, $p_1=2$, $p_2=3$. Das sind 2 Zahlen.
- Die $\left(\frac{900}{2} + \frac{900}{3} \right) - \frac{900}{2 \cdot 3} = (450 + 300) - 150 = 600$ zusammengesetzten Zahlen mit mindestens einem Primteiler p_α , wobei $\alpha \leq a$.
- Die $P_1(900, 2) = (\pi(900) - 2)$ Primzahlen p mit $3 < p \leq 900$.
- Die $P_2(900, 2)$ Zahlen $n = p_\alpha p_\beta \leq 900$ mit $3 \leq \alpha \leq \beta$. Das sind genau die Zahlen folgender Gestalten:

- ★ $5 \cdot 5 = 25; \dots; 5 \cdot 179 = 895; \underline{5 \cdot 181 = 905 > 900}$; von dieser Gestalt gibt es genau $\pi\left(\frac{900}{5}\right) - 2$ Zahlen, denn jedes Mal wird die Primzahl **5** mit einer Primzahl $p \geq 5$ multipliziert, bis 900 überschritten ist. (Die 2 ersten Primzahlen 2, 3 werden **nicht** mit 5 multipliziert.)
- ★ $7 \cdot 7 = 49; \dots; 7 \cdot 127 = 889; \underline{7 \cdot 131 = 917 > 900}$; von dieser Gestalt gibt es genau $\pi\left(\frac{900}{7}\right) - 3$ Zahlen, denn jedes Mal wird die Primzahl **7** mit einer Primzahl $p \geq 7$ multipliziert, bis 900 überschritten ist. (Die 3 ersten Primzahlen 2, 3, 5 werden **nicht** mit 7 multipliziert.)
- ★ $11 \cdot 11 = 121; \dots; 11 \cdot 79 = 869; \underline{11 \cdot 83 = 913 > 900}$; von dieser Gestalt gibt es genau $\pi\left(\frac{900}{11}\right) - 4$ Zahlen, denn jedes Mal wird die Primzahl **11** mit einer Primzahl $p \geq 11$ multipliziert, bis 900 überschritten ist. (Die 4 ersten Primzahlen 2, 3, 5, 7 werden **nicht** mit 11 multipliziert.)
- ★ $13 \cdot 13 = 169; \dots; 13 \cdot 67 = 871; \underline{13 \cdot 71 = 923 > 900}$; von dieser Gestalt gibt es genau $\pi\left(\frac{900}{13}\right) - 5$ Zahlen, denn jedes Mal wird die Primzahl **13** mit einer Primzahl $p \geq 13$ multipliziert, bis 900 überschritten ist. (Die 5 ersten Primzahlen werden **nicht** mit 13 multipliziert.)
- ★ $17 \cdot 17 = 289; \dots; 17 \cdot 47 = 799; \underline{17 \cdot 53 = 901 > 900}$; von dieser Gestalt gibt es genau $\pi\left(\frac{900}{17}\right) - 6$ Zahlen, denn jedes Mal wird die Primzahl **17** mit einer Primzahl $p \geq 17$ multipliziert, bis 900 überschritten ist. (Die 6 ersten Primzahlen werden **nicht** mit 17 multipliziert.)
- ★ $19 \cdot 19 = 361; \dots; 19 \cdot 47 = 893; \underline{19 \cdot 53 = 1007 > 900}$; von dieser Gestalt gibt es genau $\pi\left(\frac{900}{19}\right) - 7$ Zahlen, denn jedes Mal wird die Primzahl **19** mit einer Primzahl $p \geq 19$ multipliziert, bis 900 überschritten ist. (Die 7 ersten Primzahlen werden **nicht** mit 19 multipliziert.)

★ $23 \cdot 23 = 529$; ...; $23 \cdot 37 = 851$; $23 \cdot 41 = 943 > 900$; von dieser Gestalt gibt es genau $\pi\left(\frac{900}{23}\right) - 8$ Zahlen, denn jedes Mal wird die Primzahl 23 mit einer Primzahl $p \geq 23$ multipliziert, bis 900 überschritten ist. (Die 8 ersten Primzahlen werden **nicht** mit 23 multipliziert.)

★ $29 \cdot 29 = 841$; $29 \cdot 31 = 899$; $29 \cdot 37 = 1073 > 900$; von dieser Gestalt gibt es genau $\pi\left(\frac{900}{29}\right) - 9$ Zahlen, denn jedes Mal wird die Primzahl 29 mit einer Primzahl $p \geq 29$ multipliziert, bis 900 überschritten ist. (Die 9 ersten Primzahlen werden **nicht** mit 29 multipliziert.)

★ $31 \cdot 31 = 961 > 900$; von dieser Gestalt gibt es genau $\pi\left(\frac{900}{31}\right) - 10 = 0$ Zahlen, denn jedes Mal wird die Primzahl 31 mit einer Primzahl $p \geq 31$ multipliziert, bis 900 überschritten ist. (Die 10 ersten Primzahlen werden **nicht** mit 31 multipliziert.)

Das heißt
$$P_2(900, 2) = \sum_{j=3}^{10} \left(\pi\left(\frac{900}{p_j}\right) - (j-1) \right).$$

- $P_3(900, 2)$ Zahlen $n = p_\alpha p_\beta p_\lambda \leq 900$ mit $3 \leq \alpha \leq \beta \leq \lambda$. Das sind genau die Zahlen folgender Gestalten:

★ $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$; ...; $5 \cdot 5 \cdot 31 = 775$; $5 \cdot 5 \cdot 37 = 925 > 900$; $5 \cdot 7 \cdot 7 = 245$;
 ...; $5 \cdot 7 \cdot 23 = 805$; $5 \cdot 7 \cdot 29 = 1015 > 900$; $5 \cdot 11 \cdot 11 = 605$;
 ... $5 \cdot 11 \cdot 13 = 715$; $5 \cdot 11 \cdot 17 = 935 > 900$; $5 \cdot 13 \cdot 13 = 845$;
 $5 \cdot 13 \cdot 17 = 1105 > 900$; von dieser Gestalt gibt es genau $P_2\left(\frac{900}{5}, 2\right)$
 Zahlen, denn jedes Mal wird die Primzahl **5** mit zwei Primzahlen $p_\alpha, p_\beta \geq 5$ multipliziert, bis 900 überschritten ist.

★ $7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$; ...; $7 \cdot 7 \cdot 17 = 833$; $7 \cdot 7 \cdot 19 = 931 > 900$; $7 \cdot 11 \cdot 11 = 847$;
 $7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001 > 900$; von dieser Gestalt gibt es genau $P_2\left(\frac{900}{7}, 3\right)$ Zahlen, denn jedes Mal wird die Primzahl **7** mit zwei Primzahlen $p_\alpha, p_\beta \geq 7$ multipliziert, bis 900 überschritten ist.

★ $11 \cdot 11 \cdot 11 = 1331 > 900$; von dieser Gestalt gibt es genau

$P_2\left(\frac{900}{11}, 4\right) = 0$ Zahlen, denn jedes Mal wird die Primzahl **11** mit zwei Primzahlen $p_\alpha, p_\beta \geq 11$ multipliziert, bis 900 überschritten ist.

Das heißt
$$P_3(900, 2) = \sum_{j=3}^5 P_2\left(\frac{900}{p_j}, j-1\right).$$

- $P_4(900, 2)$ Zahlen $n = p_\alpha p_\beta p_\lambda p_\gamma \leq 900$ mit $3 \leq \alpha \leq \beta \leq \lambda \leq \gamma$. Das sind genau die Zahlen folgender Gestalten:

★ $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$; $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 875$; $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 11 = 1375 > 900$;
 $5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 = 1225 > 900$; von dieser Gestalt gibt es genau
 $P_3\left(\frac{900}{5}, 2\right)$ Zahlen, denn jedes Mal wird die Primzahl **5** mit drei
Primzahlen $p_\alpha, p_\beta, p_\lambda \geq 5$ multipliziert, bis 900 überschritten ist.
★ $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 2401 > 900$; von dieser Gestalt gibt es genau
 $P_3\left(\frac{900}{7}, 3\right) = 0$ Zahlen, denn jedes Mal wird die Primzahl **7** mit
drei Primzahlen $p_\alpha, p_\beta, p_\lambda \geq 7$ multipliziert, bis 900 überschritten
ist.

Das heißt
$$P_4(900, 2) = \sum_{j=3}^4 P_3\left(\frac{900}{p_j}, j-1\right).$$

- $P_5(900, 2)$ Zahlen $n = p_\alpha p_\beta p_\lambda p_\gamma p_\delta \leq 900$ mit $3 \leq \alpha \leq \beta \leq \lambda \leq \gamma \leq \delta$. Das sind genau die Zahlen folgender Gestalten:

★ $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 2525 > 900$; von dieser Gestalt gibt es genau
 $P_4\left(\frac{900}{5}, 2\right) = 0$ Zahlen, denn jedes Mal wird die Primzahl **5**
mit vier Primzahlen $p_\alpha, p_\beta, p_\lambda, p_\delta \geq 5$ multipliziert, bis 900 über-
schritten ist.

Das heißt $P_5(900, 2) = 0$ Damit ist $P_5(900, 2) = P_6(900, 2) = \dots = 0$.

Es stellen sich zwei Fragen:

1. Wieviel Terme der Form $P_2(x, a), P_2(x, a), \dots$ werden in (7.15) vorkommen?
2. Wie lässt sich $P_k(x, a)$ im allgemeinen berechnen?

Zur zweiten Frage werden wir sehen, dass wir nur die Fälle $k=2, 3$ brauchen werden. Die Berechnung von $P_2(x, a)$ und $P_3(x, a)$ werden wir an den entsprechenden Stellen erklären. Die Anzahl der Terme der Form $P_2(x, a), P_2(x, a), \dots$, die in (7.15) vorkommen, hängt offensichtlich von a ab. Falls wir a so wählen, dass $p_a \leq x^{\frac{1}{2}} < p_{a+1}$, dann wird $P_2(x, a) = 0$ sein, denn $p_\alpha p_\beta \geq p_{a+1} p_{a+1} > x^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} = x$ für alle $\alpha, \beta \geq a+1$. In diesem Falle erhalten wir

$$\begin{aligned} \pi(x) = & a - 1 + \left([x] - \sum_{1 \leq \alpha \leq a} \left[\frac{x}{p_\alpha} \right] \right. \\ & + \sum_{1 \leq \alpha < \beta \leq a} \left[\frac{x}{p_\alpha p_\beta} \right] \\ & - \sum_{1 \leq \alpha < \beta < \lambda \leq a} \left[\frac{x}{p_\alpha p_\beta p_\lambda} \right] \\ & \left. \pm \dots \right), \text{ mit } \sqrt{x} \leq p_{a+1} \leq x; \text{ d.h. } a = \pi(x^{\frac{1}{2}}) \end{aligned} \quad (7.16)$$

also die LEGENDRE-Formel (7.11) wieder. Im allgemeinen wählen wir a , so dass $p_a \leq x^{\frac{1}{r}} < p_{a+1}$, dann wird $P_t(x, a) = 0$ für alle $t \geq r$ gelten. Es bietet sich also an, $a := \pi(x^{\frac{1}{r}})$ zu setzen. MEISSEL hat $r=3$ gewählt. Damit ist $a := \pi(x^{\frac{1}{3}})$ und aus (7.15) erhalten wir

$$\begin{aligned} \pi(x) = & \left([x] - \sum_{1 \leq \alpha \leq a} \left[\frac{x}{p_\alpha} \right] \right. \\ & + \sum_{1 \leq \alpha < \beta \leq a} \left[\frac{x}{p_\alpha p_\beta} \right] \\ & - \sum_{1 \leq \alpha < \beta < \lambda \leq a} \left[\frac{x}{p_\alpha p_\beta p_\lambda} \right] \\ & \left. \pm \dots \right) + a - 1 - P_2(x, a), \text{ wobei } a = \pi(x^{\frac{1}{3}}) \end{aligned} \quad (7.17)$$

Wir berechnen nun $P_2(x, a)$:

$$P_2(x, a) := \# \left\{ p_\alpha p_\beta \mid \alpha, \beta \geq a+1 \text{ und } p_\alpha p_\beta \leq x \right\}$$

Aus $p_\alpha p_\beta \leq x$ folgt $p_\alpha \leq x^{\frac{1}{2}}$ oder $p_\beta \leq x^{\frac{1}{2}}$, das heißt $\alpha \leq \pi(x^{\frac{1}{2}})$ oder $\beta \leq \pi(x^{\frac{1}{2}})$. Damit ist

$$\begin{aligned} & \left\{ p_\alpha p_\beta \mid \alpha, \beta \geq a+1 \text{ und } p_\alpha p_\beta \leq x \right\} \\ = & \left\{ p_{a+1} p_\beta \mid \beta \geq a+1 \text{ und } p_{a+1} p_\beta \leq x \right\} \\ \cup & \left\{ p_{a+2} p_\beta \mid \beta \geq a+2 \text{ und } p_{a+2} p_\beta \leq x \right\} \\ \cup & \\ \dots & \\ \cup & \left\{ p_b p_\beta \mid \beta \geq b; p_b p_\beta \leq x \text{ und } b = \pi(x^{\frac{1}{2}}) \right\} \end{aligned} \tag{7.18}$$

Das heißt

$$\begin{aligned} & \left\{ p_\alpha p_\beta \mid \alpha, \beta \geq a+1 \text{ und } p_\alpha p_\beta \leq x \right\} \\ = & \left\{ p_{a+1} \right\} \left\{ p_\beta \mid \beta \geq a+1 \text{ und } p_\beta \leq \frac{x}{p_{a+1}} \right\} \\ \cup & \left\{ p_{a+2} \right\} \left\{ p_\beta \mid \beta \geq a+2 \text{ und } p_\beta \leq \frac{x}{p_{a+2}} \right\} \\ \cup & \\ \dots & \\ \cup & \left\{ p_b \right\} \left\{ p_\beta \mid \beta \geq b; p_\beta \leq \frac{x}{p_b} \text{ und } b = \pi(x^{\frac{1}{2}}) \right\} \end{aligned} \tag{7.19}$$

Daraus erhalten wir :

$$\begin{aligned}
& \# \left\{ p_\alpha p_\beta \mid \alpha, \beta \geq a+1 \text{ und } p_\alpha p_\beta \leq x \right\} \\
&= \# \left\{ p_\beta \mid \beta \geq a+1 \text{ und } p_\beta \leq \frac{x}{p_{a+1}} \right\} \\
&+ \# \left\{ p_\beta \mid \beta \geq a+2 \text{ und } p_\beta \leq \frac{x}{p_{a+2}} \right\} \\
&+ \\
&\dots \\
&+ \\
&+ \# \left\{ p_\beta \mid \beta \geq b; p_\beta \leq \frac{x}{p_b} \text{ und } b = \pi(x^{\frac{1}{2}}) \right\}
\end{aligned} \tag{7.20}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
& P_2(x, a) \\
&= \pi\left(\frac{x}{p_{a+1}}\right) - a \\
&+ \pi\left(\frac{x}{p_{a+2}}\right) - (a+1) \\
&+ \\
&\dots \\
&+ \\
&+ \pi\left(\frac{x}{p_b}\right) - (b-1) \text{ wobei } b = \pi(x^{\frac{1}{2}}) \\
&= \sum_{j=a+1}^b \left(\pi\left(\frac{x}{p_j}\right) - (j-1) \right) \text{ wobei } b = \pi(x^{\frac{1}{2}}) \\
&= -\frac{(b-a)(b+a-1)}{2} + \sum_{j=a+1}^b \pi\left(\frac{x}{p_j}\right) \text{ wobei } b = \pi(x^{\frac{1}{2}})
\end{aligned} \tag{7.21}$$

Daraus folgt

$$P_2(x, a) = -\frac{(b-a)(b+a-1)}{2} + \sum_{j=a+1}^b \pi\left(\frac{x}{p_j}\right) \text{ wobei } b = \pi(x^{\frac{1}{2}}) \tag{7.22}$$

$$P_2(x, a) = \sum_{j=a+1}^b \left(\pi\left(\frac{x}{p_j}\right) - (j-1) \right) \text{ wobei } b = \pi(x^{\frac{1}{2}}) \quad (7.23)$$

Sei außerdem

$$\begin{aligned} & \phi(x, a) \\ := & \left([x] - \sum_{1 \leq \alpha \leq a} \left\lfloor \frac{x}{p_\alpha} \right\rfloor \right. \\ & + \sum_{1 \leq \alpha < \beta \leq a} \left\lfloor \frac{x}{p_\alpha p_\beta} \right\rfloor \\ & - \sum_{1 \leq \alpha < \beta < \lambda \leq a} \left\lfloor \frac{x}{p_\alpha p_\beta p_\lambda} \right\rfloor \\ & \mp \dots \left. \right) \end{aligned} \quad (7.24)$$

$\phi(x, a)$ ist also die Anzahl aller Zahlen $\leq x$, die weder durch p_1 , noch durch p_2, \dots , noch durch p_a teilbar sind.

Wegen (7.22) und (7.24) lässt sich aus (7.17) die MEISSEL-Formel herleiten

$$\begin{aligned} & \pi(x) \\ = & \phi(x, a) + a - 1 + \frac{(b-a)(b+a-1)}{2} + \sum_{j=a+1}^b \pi\left(\frac{x}{p_j}\right) \text{ wobei } a = \pi(x^{\frac{1}{3}}) \\ = & \phi(x, a) + \frac{(b+a-2)(b-a+1)}{2} + \sum_{j=a+1}^b \pi\left(\frac{x}{p_j}\right) \text{ wobei } a = \pi(x^{\frac{1}{3}}) \end{aligned} \quad (7.25)$$

Aus der Formel (7.25) lässt sich die erhoffte Verbesserung gegenüber (7.11) leicht erkennen: Die Summe $\sum_{j=a+1}^b \pi\left(\frac{x}{p_j}\right)$ enthält ”nur noch” $b - a = \pi(x^{\frac{1}{2}}) - \pi(x^{\frac{1}{3}})$ Terme. Außerdem hat $\phi(x, a)$ aus (7.25) viel weniger Terme als $\phi(x, \pi(x^{\frac{1}{2}}))$ aus (7.11) und lässt sich effizient berechnen: Als nächstes stellen wir eine Methode vor, wie man $\phi(x, a)$ ”effizient” berechnen kann.

Die Zahlen $\leq x$, die durch keine Primzahl aus $\{p_1, p_2, \dots, p_a\}$ teilbar sind, sind genau die Zahlen $\leq x$, die durch keine Primzahl aus $\{p_1, p_2, \dots, p_{a-1}\}$ teilbar sind, mit Ausnahme aller diejenigen Zahlen $\leq x$, die **nicht** durch p_a teilbar sind. Aus (7.24) kann man also die Rekursionsgleichung:

$$\phi(x, a) = \phi(x, a-1) - \phi\left(\frac{x}{p_a}, a-1\right) \quad (7.26)$$

erhalten. Durch wiederholte Anwendung von (7.26) erreichen wir irgendwann $\phi(x, 1)$, das ist genau die Anzahl aller ungeraden Zahlen $\leq x$, denn $p_1 = 2$. Es geht aber noch effizienter. Dazu betrachten wir die ersten k Primzahlen p_1, p_2, \dots, p_k und $p_k\$:= p_1 p_2 \dots p_k$. Aus (7.24) folgt

$$\begin{aligned}
& \phi(p_k \$, k) \\
& := \left([p_k \$] - \sum_{1 \leq \alpha \leq k} \left[\frac{p_k \$}{p_\alpha} \right] \right. \\
& \quad + \sum_{1 \leq \alpha < \beta \leq k} \left[\frac{p_k \$}{p_\alpha p_\beta} \right] \\
& \quad - \sum_{1 \leq \alpha < \beta < \lambda \leq k} \left[\frac{p_k \$}{p_\alpha p_\beta p_\lambda} \right] \\
& \quad \mp \dots \Bigg) \\
& = p_k \$ \left(1 - \sum_{p_\alpha \leq k} \left[\frac{1}{p_\alpha} \right] \right. \\
& \quad + \sum_{p_\alpha < p_\beta \leq k} \left[\frac{1}{p_\alpha p_\beta} \right] \\
& \quad - \sum_{p_\alpha < p_\beta < p_\lambda \leq k} \left[\frac{1}{p_\alpha p_\beta p_\lambda} \right] \\
& \quad \mp \dots \Bigg) \\
& = p_k \$ \left(1 - \frac{1}{p_1} \right) \left(1 - \frac{1}{p_2} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_a} \right) \\
& = \prod_{j=1}^k (p_j - 1) \\
& = \varphi(p_k \$)
\end{aligned} \tag{7.27}$$

wobei φ die EULERSche Phifunktion ist.

Also ist

$$\phi(p_k \$, k) = \varphi(p_k \$) = \prod_{j=1}^k (p_j - 1) \tag{7.28}$$

Für $s \geq 0$ und $0 \leq t < p_k \$$ gilt

$$\begin{aligned}
& \phi(s \cdot p_k\$ + t, k) \\
:= & \left([s \cdot p_k\$ + t] - \sum_{1 \leq \alpha \leq k} \left[\frac{s \cdot p_k\$ + t}{p_\alpha} \right] \right. \\
& + \sum_{1 \leq \alpha \leq \beta \leq k} \left[\frac{p_k\$}{p_\alpha p_\beta} \right] \\
& - \sum_{1 \leq \alpha \leq p_\beta \leq p_\lambda \leq k} \left[\frac{p_k\$}{p_\alpha p_\beta p_\lambda} \right] \\
& \mp \dots \left. \right) \\
= & s \cdot \left([p_k\$] - \sum_{1 \leq \alpha \leq k} \left[\frac{p_k\$}{p_\alpha} \right] \right. \\
& + \sum_{1 \leq \alpha \leq \beta \leq k} \left[\frac{s \cdot p_k\$ + t}{p_\alpha p_\beta} \right] \\
& - \sum_{1 \leq \alpha \leq p_\beta \leq p_\lambda \leq k} \left[\frac{s \cdot p_k\$ + t}{p_\alpha p_\beta p_\lambda} \right] \\
& \mp \dots \left. \right) \\
& + \left([t] - \sum_{1 \leq \alpha \leq k} \left[\frac{t}{p_\alpha} \right] \right. \\
& + \sum_{1 \leq \alpha \leq \beta \leq k} \left[\frac{t}{p_\alpha p_\beta} \right] \\
& - \sum_{1 \leq \alpha \leq p_\beta \leq p_\lambda \leq k} \left[\frac{t}{p_\alpha p_\beta p_\lambda} \right] \\
& \mp \dots \left. \right) \\
= & s \cdot \varphi(p_k\$) + \phi(t, k)
\end{aligned} \tag{7.29}$$

Das heißt

$$\phi(s \cdot p_k\$ + t, k) = s \cdot \varphi(p_k\$) + \phi(t, k) \text{ mit } s \geq 0 \text{ und } 0 \leq t < p_k\$ \tag{7.30}$$

Analog und aus Symmetrie Gründen gilt

$$\phi(t, k) = \varphi(p_k\$) - \phi(p_k\$ - t - 1, k) \text{ mit } \frac{p_k\$}{2} < t \leq p_k\$ \tag{7.31}$$

Wegen (7.16) gilt außerdem

$$\phi(x, a) = \pi(x) - a + 1 \text{ mit } x^{\frac{1}{2}} < p_{a+1} < x \quad (7.32)$$

Mit Hilfe der (7.26) sowie (7.28), (7.30), (7.31) und (7.32) lässt sich nun $\phi(x, a)$ berechnen. Dies werden wir im folgenden Beispiel erläutern.

Mit Hilfe der MEISSEL-Formel (7.25) berechnen wir nun $\pi(10000)$.

$$\begin{aligned} & \pi(10000) \\ = & \phi(10000, 8) + \frac{31 \cdot 18}{2} \\ + & \sum_{j=9}^{25} \pi\left(\frac{10000}{p_j}\right) \end{aligned} \quad (7.33)$$

wobei $a = \pi(10000^{\frac{1}{3}}) = 8$ und $b = \pi(10000^{\frac{1}{2}}) = 25$

Zunächst berechnen wir $\phi(10000, 8)$

$$\begin{aligned} \phi(10000, 8) &= \phi(10000, 7) - \phi\left(\frac{10000}{19}, 7\right) = \phi(10000, 7) - \phi(526, 7) && \text{wegen (7.26)} \\ \phi(10000, 7) &= \phi(10000, 6) - \phi\left(\frac{10000}{17}, 6\right) = \phi(10000, 6) - \phi(588, 6) && \text{wegen (7.26)} \\ \phi(10000, 6) &= \phi(10000, 5) - \phi\left(\frac{10000}{13}, 5\right) = \phi(10000, 5) - \phi(769, 5) && \text{wegen (7.26)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \phi(10000, 5) \\
= & \phi(10000, 4) - \phi\left(\frac{10000}{11}, 4\right) \\
& \text{wegen (7.26)} \\
= & \phi(10000, 4) - \phi(909, 4) \\
= & \phi(47 \cdot 210 + 130, 4) - \phi(4 \cdot 210 + 69, 4) \\
& \text{beachte } p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210 \\
= & 47 \cdot \varphi(210) + \phi(130, 4) - (4 \cdot \varphi(210) + \phi(69, 4)) \\
& \text{wegen (7.30)} \\
= & 47 \cdot 48 + \phi(130, 4) - (4 \cdot 48 + \phi(69, 4)) \\
& \text{denn } \varphi(210) = 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 = 48 \\
= & 47 \cdot 48 + \phi(130, 4) - (4 \cdot 48 + \pi(69) - 4 + 1) \\
& \text{wegen (7.32)} \\
= & 47 \cdot 48 + \phi(130, 4) - (4 \cdot 48 + 19 - 4 + 1) \\
& \text{denn } \pi(69) = 19 \\
= & 47 \cdot 48 + \phi(130, 4) - 208 \\
= & 47 \cdot 48 + \phi(130, 3) - \phi(18, 3) - 208 \\
& \text{wegen (7.26)} \\
= & 47 \cdot 48 + \phi(4 \cdot 30 + 10, 3) - \phi(18, 3) - 208 \\
& \text{beachte } p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30 \\
= & 47 \cdot 48 + 4 \cdot \varphi(30) + (10, 3) - \phi(18, 3) - 208 \\
& \text{wegen (7.28)} \\
= & 47 \cdot 48 + 4 \cdot 8 + \phi(10, 3) - \phi(18, 3) - 208 \\
& \text{denn } \varphi(30) = 1 \cdot 2 \cdot 4 = 8 \\
= & 47 \cdot 48 + 4 \cdot 8 + \pi(10) - 3 + 1 - (\pi(18) - 3 + 1) - 208 \\
& \text{wegen (7.32)} \\
= & 47 \cdot 48 + 4 \cdot 8 + 4 - 3 + 1 - (7 - 3 + 1) - 208 \\
& \text{denn } \pi(10) = 4 \text{ und } \pi(18) = 7 \\
= & 2077.
\end{aligned}$$

Analog erhalten wir

$$\begin{aligned}
 & \phi(526, 7) \\
 = & \phi(526, 6) - \phi\left(\frac{526}{17}, 6\right) \\
 = & \phi(526, 6) - \phi(30, 6) \\
 = & \phi(526, 5) - \phi\left(\frac{526}{13}, 5\right) - 5 \\
 = & \phi(526, 4) - \phi\left(\frac{526}{11}, 4\right) - \phi(40, 5) - 5 \\
 = & \phi(2 \cdot 210 + 106, 4) - \phi(47, 4) - 8 - 5 \\
 = & 2 \cdot 48 + \phi(106, 4) - 12 - 13 \\
 = & 95.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \phi(588, 6) \\
 = & \phi(588, 5) - \phi\left(\frac{588}{13}, 5\right) \\
 = & \phi(588, 4) - \phi\left(\frac{588}{13}, 5\right) - \phi(45, 5) \\
 = & \phi(2 \cdot 210 + 168, 4) - \phi(53, 4) - 10 \\
 = & 2 \cdot 48 + (168, 4) - 13 - 10 \\
 = & 111.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \phi(769, 5) \\
 = & \phi(769, 4) - \phi\left(\frac{769}{11}, 4\right) \\
 = & \phi(3 \cdot 210 + 139, 4) - \phi(69, 4) \\
 = & 3 \cdot 48 + \phi(139, 4) - 16 \\
 = & 160.
 \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\phi(10000, 8) = 2077 - 95 - 111 - 160 = 1711. \quad (7.34)$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=9}^{25} \pi\left(\frac{10000}{p_j}\right) \\
 = & \pi\left(\frac{10000}{23}\right) + \pi\left(\frac{10000}{29}\right) + \cdots + \pi\left(\frac{10000}{97}\right) \\
 = & \pi(434) + \pi(344) + \pi(322) + \cdots + \pi(103) \\
 = & 84 + 68 + 66 + \cdots + 27 \\
 = & 761.
 \end{aligned} \tag{7.35}$$

(7.35) und (7.34) in (7.33) eingesetzt, ergibt $\pi(10000) = 1711 + 9 \cdot 31 - 761 = 1229$.

7.3 Lehmer–Methode

Wählen wir in (7.14) $a = \pi(x^{\frac{1}{4}})$ und berücksichtigen (7.24), dann erhalten wir

$$\pi(x) = \phi(x, a) + a - 1 - (P_2(x, a) + P_3(x, a)), \text{ wobei } a = \pi(x^{\frac{1}{4}}). \tag{7.36}$$

Analog zur Gleichung (7.22) erhält man

$$\begin{aligned}
 & P_2(x, a) \\
 = & -\frac{(b-a)(b+a-1)}{2} \\
 + & \sum_{j=a+1}^b \pi\left(\frac{x}{p_j}\right) \\
 & , \text{ wobei } b = \pi(x^{\frac{1}{2}}) \text{ und } a = \pi(x^{\frac{1}{4}}).
 \end{aligned} \tag{7.37}$$

Wir berechnen nun $P_3(x, a)$:

$$P_3(x, a) := \#\left\{p_\alpha p_\beta p_\lambda \mid \alpha, \beta, \lambda \geq a+1 \text{ und } p_\alpha p_\beta p_\lambda \leq x\right\}$$

Aus $p_\alpha p_\beta p_\lambda \leq x$ folgt $p_\alpha \leq x^{\frac{1}{3}}$ oder $p_\beta \leq x^{\frac{1}{3}}$ oder $p_\lambda \leq x^{\frac{1}{3}}$, das heißt $\alpha \leq \pi(x^{\frac{1}{3}})$ oder $\beta \leq \pi(x^{\frac{1}{3}})$ oder $\lambda \leq \pi(x^{\frac{1}{3}})$. Damit ist

$$\begin{aligned}
& \left\{ p_\alpha p_\beta p_\lambda | \alpha, \beta, \lambda \geq a+1 \text{ und } p_\alpha p_\beta p_\lambda \leq x \right\} \\
= & \left\{ p_{a+1} p_\beta | \beta \geq a+1 \text{ und } p_{a+1} p_\beta \leq x \right\} \\
\bar{\cup} & \left\{ p_{a+2} p_\beta p_\lambda | \beta, \lambda \geq a+2 \text{ und } p_{a+2} p_\beta p_\lambda \leq x \right\} \\
\bar{\cup} & \\
& \dots \\
\bar{\cup} & \\
\bar{\cup} & \left\{ p_c p_\beta p_\lambda | \beta \geq c; p_c p_\beta p_\lambda \leq x \text{ und } c = \pi(x^{\frac{1}{3}}) \right\}
\end{aligned} \tag{7.38}$$

Das heißt

$$\begin{aligned}
& \left\{ p_\alpha p_\beta p_\lambda | \alpha, \beta, \lambda \geq a+1 \text{ und } p_\alpha p_\beta p_\lambda \leq x \right\} \\
= & \left\{ p_{a+1} \right\} \left\{ p_\beta | \beta p_\lambda \geq a+1 \text{ und } p_\beta p_\lambda \leq \frac{x}{p_{a+1}} \right\} \\
\bar{\cup} & \left\{ p_{a+2} \right\} \left\{ p_\beta p_\lambda | \beta, \lambda \geq a+2 \text{ und } p_\beta p_\lambda \leq \frac{x}{p_{a+2}} \right\} \\
\bar{\cup} & \\
& \dots \\
\bar{\cup} & \\
\bar{\cup} & \left\{ p_c \right\} \left\{ p_\beta p_\lambda | \beta \geq b; p_\beta, p_\lambda \leq \frac{x}{p_c} \text{ und } c = \pi(x^{\frac{1}{3}}) \right\}
\end{aligned} \tag{7.39}$$

Daraus erhalten wir :

$$\begin{aligned}
& \# \left\{ p_\alpha p_\beta p_\lambda \mid \alpha, \beta, \lambda \geq a+1 \text{ und } p_\alpha p_\beta p_\lambda \leq x \right\} \\
= & \# \left\{ p_\beta p_\lambda \mid \beta, \lambda \geq a+1 \text{ und } p_\beta p_\lambda \leq \frac{x}{p_{a+1}} \right\} \\
+ & \# \left\{ p_\beta p_\lambda \mid \beta, \lambda \geq a+2 \text{ und } p_\beta p_\lambda \leq \frac{x}{p_{a+2}} \right\} \\
+ & \\
& \dots \\
+ & \\
+ & \# \left\{ p_\beta p_\lambda \mid \beta \lambda \geq c; p_\beta p_\lambda \leq \frac{x}{p_c} \text{ und } c = \pi(x^{\frac{1}{3}}) \right\}
\end{aligned} \tag{7.40}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
& P_3(x, a) \\
= & P_2\left(\frac{x}{p_{a+1}}, a\right) \\
+ & P_2\left(\frac{x}{p_{a+2}}, a+1\right) \\
+ & \\
& \dots \\
+ & \\
+ & P_2\left(\frac{x}{p_c}, c-1\right) \text{ wobei } c = \pi(x^{\frac{1}{3}}) \\
= & \sum_{j=a+1}^b \left(\pi\left(\frac{x}{p_j}\right) - (j-1) \right) \text{ wobei } b = \pi(x^{\frac{1}{2}}) \\
= & \sum_{j=a+1}^c \sum_{k=j}^{b_j} \left(\pi\left(\frac{x}{p_j p_k}\right) - (k-1) \right) \\
& \text{wobei } b_j = \pi\left(\sqrt{\frac{x}{p_j}}\right) \text{ wegen (7.23).}
\end{aligned} \tag{7.41}$$

Also ist

$$P_3(x, a) = \sum_{j=a+1}^c \sum_{k=j}^{b_j} \left(\pi\left(\frac{x}{p_j p_k}\right) - (k-1) \right), \text{ wobei } c := \pi(x^{\frac{1}{3}}). \tag{7.42}$$

Damit lautet die LEHMER-Formel

$$\begin{aligned}
 & \pi(x) \\
 = & \phi(x, a) + \frac{(b+a-2)(b-a+1)}{2} \\
 - & \sum_{j=a+1}^b \pi\left(\frac{x}{p_j}\right) \\
 - & \sum_{j=a+1}^c \sum_{k=j}^{b_j} \left(\pi\left(\frac{x}{p_j p_k}\right) - (k-1) \right) \\
 & \text{mit } a = \pi(x^{\frac{1}{4}}), c = \pi(x^{\frac{1}{3}}), b = \pi(x^{\frac{1}{2}}), b_j = \pi\left(\sqrt{\frac{x}{p_j}}\right)
 \end{aligned} \tag{7.43}$$

Man sieht leicht die Verbesserungen bezüglich der Anzahl der Terme der vorkommenden Teilsummen in der Formel (7.43). Mit Hilfe der LEHMER-Formel (7.43) berechnen wir nun $\pi(100000)$:

$$\begin{aligned}
 & a \\
 = & \pi(10000) \\
 = & \pi(17) \\
 = & 7;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & b \\
 = & \pi(100000^{\frac{1}{2}}) \\
 = & \pi(316) \\
 = & 65;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & c \\
 = & \pi(100000^{\frac{1}{3}}) \\
 = & \pi(46) \\
 = & 14
 \end{aligned}$$

Aus $b_j = \pi(\sqrt{\frac{100000}{29}})$ für $8 \leq j \leq 14$ folgt

$$\begin{aligned}
& b_8 \\
&= \pi\left(\sqrt{\frac{100000}{19}}\right) \\
&= \pi(72) \\
&= 20;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& b_9 \\
&= \pi\left(\sqrt{\frac{100000}{23}}\right) \\
&= \pi(65) \\
&= 18;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& b_{10} \\
&= \pi\left(\sqrt{\frac{100000}{29}}\right) \\
&= \pi(58) \\
&= 16;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& b_{11} \\
&= \pi\left(\sqrt{\frac{100000}{31}}\right) \\
&= \pi(56) \\
&= 16;
\end{aligned}$$

$$b_{12} = b_{13} = b_{14} = 15.$$

Für $x = 10^5$ lautet die LEHMER-Formel

$$\begin{aligned}
& \pi(100000) \\
&= \phi(100000, 7) + \frac{70 \cdot 59}{2} \\
&- \sum_{j=8}^{65} \pi\left(\frac{100000}{p_j}\right) \\
&- \sum_{j=8}^{14} \sum_{k=j}^{b_j} \left(\pi\left(\frac{100000}{p_j p_k}\right) - (k-1) \right)
\end{aligned} \tag{7.44}$$

Zunächst berechnen wir $\phi(10^5, 7)$:

$$\begin{aligned}
 & \phi(10^5, 7) \\
 &= \phi(10^5, 6) - \phi\left(\frac{10^5}{17}, 6\right) \\
 &= \phi(10^5, 6) - \phi(5882, 6). \\
 & \phi(10^5, 6) \\
 &= \phi(10^5, 5) - \phi\left(\frac{10^5}{13}, 5\right) \\
 &= \phi(10^5, 5) - \phi(7692, 5).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \phi(10^5, 5) \\
 &= \phi(10^5, 4) - \phi\left(\frac{10^5}{11}, 4\right) \\
 &= \phi(476 \cdot 210 + 40, 4) - \phi(9090, 4) \\
 &= 476 \cdot 48 + \phi(40, 4) - \phi(43 \cdot 210 + 60, 4) \\
 &= 20779.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \phi(5882, 6) \\
 &= \phi(5882, 5) - \phi\left(\frac{5882}{13}, 5\right) \\
 &= \phi(5882, 4) - \phi\left(\frac{5882}{11}, 4\right) - \phi(452, 5) \\
 &= 28 \cdot 48 + \phi(2, 4) - \phi(534, 4) - \phi(452, 4) + \phi\left(\frac{452}{11}, 4\right) \\
 &= 1128.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \phi(7692, 5) \\
 &= \phi(7692, 4) - \phi\left(\frac{7692}{11}, 4\right) \\
 &= 1598.
 \end{aligned}$$

Aus diesen Berechnungen erhalten wir $\phi(10^5, 7) = 18053$. Für die einfache Summe $\sum_{j=8}^{65} \pi\left(\frac{100000}{p_j}\right)$ in (7.44) gilt

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=8}^{65} \pi\left(\frac{100000}{p_j}\right) \\
&= \pi(5263) + \pi(4347) + \pi(3448) + \cdots + \pi(321) + \pi(319) \\
&= 698 + 593 + 481 + \cdots + 66 + 66 \\
&= 9940.
\end{aligned}$$

Wir spalten die Doppelsumme $\sum_{j=8}^{14} \sum_{k=j}^{b_j} \left(\pi\left(\frac{100000}{p_j p_k}\right) - (k-1) \right)$ in 7 einfache Summen auf:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=8}^{14} \sum_{k=j}^{b_j} \left(\pi\left(\frac{100000}{p_j p_k}\right) - (k-1) \right) \\
&= \sum_{k=8}^{20} \left(\pi\left(\frac{100000}{19 p_k}\right) - (k-1) \right) \\
&+ \sum_{k=9}^{18} \left(\pi\left(\frac{100000}{23 p_k}\right) - (k-1) \right) \\
&+ \vdots \\
&+ \sum_{k=13}^{15} \left(\pi\left(\frac{100000}{41 p_k}\right) - (k-1) \right) \\
&+ \sum_{k=14}^{15} \left(\pi\left(\frac{100000}{43 p_k}\right) - (k-1) \right) \\
&= \pi\left(\frac{100000}{19 \cdot 19}\right) + \pi\left(\frac{100000}{19 \cdot 23}\right) + \cdots + \pi\left(\frac{100000}{43 \cdot 47}\right) - (169 + 125 + \cdots + 27) \\
&= \pi(277) + \pi(228) + \cdots + \pi(49) - 569 \\
&= 586.
\end{aligned}$$

Damit lautet das endgültige Resultat $\pi(10^5) = 18053 + 35 \cdot 59 - 9940 - 586 = 9592$.

Mittels einem IBM 701-Rechner und mit Hilfe von (7.43) berechnete LEHMER andere Werte für $\pi(x)$, wobei $x = y \cdot 10^6$ und $y=20, 25, 33, 37, 40, 90, 100, 999, 1\,000$ und $10\,000$. Durch solche Berechnungen entdeckte LEHMER, dass der von MEISSEL berechnete Wert für $\pi(10^9)$ um 56 zu niedrig war. LEHMERS Berechnung von $\pi(10^{10})$ mußte um 1 nach unten korrigiert werden. Für $j=11, 12, 13$ wurde $\pi(10^j)$ von BOHMAN [5] (Mittels LEHMERS Methode) im Jahre 1972 angegeben [9, Seite 289].

7.4 Anmerkungen

Sowohl die MEISSEL– als auch die LEHMER–Methode für die Berechnung von $\pi(x)$ basiert auf der LEGENDRE–Formel, allerdings versucht jede Methode, die Summanden ”‘intelligent’” zu gruppieren und zu arrangieren, dass man mit wenig Summationstermen auskommt. Diese Verfahren konnten im Laufe der Zeit immer wieder verbessert werden. Mapes [41] hat im Jahre 1963 eine effizientere aber ein ”‘bißchen’” kompliziertere Methode zur Berechnung von $\pi(x)$ entwickelt. Weitere Verbesserung erzielten LAGARIAS, MILLER und ODLYZKO [46]; sie haben eine neue Variante der MEISSEL–LEHMER Methode zur Berechnung von $\pi(x)$ veröffentlicht, bei der eine Laufzeit von $O\left(\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\log(x)}\right)$ und ein Speicherplatzbedarf von $O\left(x^{\frac{1}{3}} \log^2(x) \log(\log(x))\right)$ benötigt wird. LAGARIAS, MILLER und ODLYZKO berechneten $\pi(x)$ bis $4 \cdot 10^{16}$ und entdeckten, dass der berechnete Wert für $4 \cdot 10^{13}$ bei BOHMAN [5] um 941 zu niedrig war.

In [45] beschrieben LAGARIAS und ODLYZKO eine völlig neue analytische Methode zur Berechnung von $\pi(x)$, basierend auf numerischer Integration. Die Laufzeit betrug dabei $O\left(x^{0,5+\varepsilon}\right)$ und der Speicherplatzbedarf $O\left(x^{0,25+\varepsilon}\right)$ für jede $\varepsilon > 0$. Im Jahre 1996 haben DELÉGLISE und RIVAT [61] einen Algorithmus zur Berechnung von $\pi(x)$ vorgestellt, der eine Laufzeit von $O\left(\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\log^2(x)}\right)$ und einen Speicherplatzbedarf von $O\left(x^{\frac{1}{3}} \log^3(x) \log(\log(x))\right)$ braucht. DELÉGLISE und RIVAT haben die Werte bis (1018) berechnet. Für den einen Wert $\pi(10^{18})$ hat der von ihnen benutzten HP–PPA–Rechner fast 10 Tage (!) gebraucht.

Ferner weisen wir darauf hin, dass man in der Literatur [60] lauffähige (wir hoffen !!) Computerprogramme zur Berechnung von $\pi(x)$ finden kann, die auf einigen der o. g. Verfahren basiert sind.

Schließlich geben wir folgende Übersichtstabelle (siehe Tabelle 7.1 auf Seite 102) einiger Verfahren zur Berechnung von $\pi(x)$ im Vergleich.

Methode	Jahr	Laufzeit	Speicherplatzbedarf
LEGENDRE	1830	$O(x)$	$O(\sqrt{x})$
MEISSEL	1870	$O\left(\frac{x}{\log^3(x)}\right)$	$O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log(x)}\right)$
LEHMER	1958	$O\left(\frac{x}{\log^4(x)}\right)$	$O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log(x)}\right)$
MAPES	1963	$O\left(x^{0,7}\right)$	$O\left(x^{0,7}\right)$
LAGARIAS–MILLER–ODLYZKO	1958	$O\left(\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\log(x)}\right)$	$O\left(x^{\frac{1}{3}} \log^2(x) \log(\log(x))\right)$
LAGARIAS–ODLYZKO	1987	$O\left(x^{0,5+\varepsilon}\right)$	$O\left(x^{0,25+\varepsilon}\right)$
DELÉGLISE–RIVAT	1996	$O\left(\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\log^2(x)}\right)$	$O\left(x^{\frac{1}{3}} \log^3(x) \log(\log(x))\right)$

Tabelle 7.1: Einige Verfahren zur Berechnung von $\pi(x)$ im Vergleich

Kapitel 8

Numerische Überprüfung des Primzahlsatzes

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der numerischen Überprüfung des Primzahlsatzes, indem wir die Funktionen $R(x) - \pi(x)$; $li(x) - \pi(x)$ sowie $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ für $x \leq 10^{18}$ untersuchen. Wir haben schon im Kapitel 7 einige Verfahren zur numerischen Berechnung von $\pi(x)$ vorgestellt. In diesem Kapitel erklären wir zunächst, wie man $li(x)$ und $R(x)$ in der Praxis am einfachsten berechnen kann.

$li(x)$ lässt sich in der Praxis am einfachsten aus der für $x > 1$ gültigen Reihendarstellung

$$li(x) = \gamma + \log(\log(x)) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log(x))^n}{n \cdot n!} \quad (8.1)$$

berechnen, wobei

$$\begin{aligned} \gamma &:= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right) - \log(n) \right) \\ &= 0,577\,215\,664\,901\,532 \dots \end{aligned} \quad (8.2)$$

die EULER–MASCHERONISCHE Konstante¹ bezeichnet.

Die Gleichung (8.1) lässt sich aus der Definition von $\text{li}(x)$ herleiten, denn

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{dt}{\log(t)} \\
 = & \int \frac{\exp(z)dz}{z} \quad \text{Substitution } z=\log(t) \\
 = & \int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-1}dz}{n!} \\
 = & \log(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n \cdot n!} + C \\
 = & \log(\log(t)) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log(t))^n}{n \cdot n!} + C \\
 , & \quad \text{wobei } C \text{ eine Konstante ist.}
 \end{aligned} \tag{8.3}$$

Für $\text{li}(x)$ sind die Grenzen des Integrals 0 und x , damit lässt sich zeigen

$$\text{li}(x) = \gamma + \log(\log(x)) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log(x))^n}{n \cdot n!}. \tag{8.4}$$

Definitionsgemäß ist

$$R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \text{li}(\sqrt[n]{x}), \tag{8.5}$$

wobei μ die im Kapitel 6 definierte MÖBIUS–Funktion ist. Daraus folgt

$$R(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log(x))^k}{k! \cdot k\zeta(k+1)} \tag{8.6}$$

denn durch die Substitution $t=\log(x)$ folgt

$$R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \text{li}\left(\exp\left(\frac{t}{n}\right)\right) \tag{8.7}$$

¹Bis heute weiß man nicht, ob die EULER–MASCHERONISCHE Konstante rational oder irrational ist. [63, Seite 298] sowie [9, Seite 214]

Benutzen wir nun (8.1), so gilt

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \operatorname{li}\left(\exp\left(\frac{t}{n}\right)\right) \\
 = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \left(\gamma + \log\left(\frac{t}{n}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot k!} \left(\frac{t}{n}\right)^k \right) \\
 = & \left(\gamma + \log(t) \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n) \log(n)}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(n) t^k}{n^{k+1} \cdot k \cdot k!}
 \end{aligned} \tag{8.8}$$

Aus

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \\
 = & \lim_{s \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} \\
 = & \lim_{s \rightarrow 1} \frac{1}{\zeta(s)} \\
 = & 0
 \end{aligned} \tag{8.9}$$

und

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n) \log(n)}{n} \\
 = & \lim_{s \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n) \log(n)}{n^s} \\
 = & \lim_{s \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) \frac{d}{ds} \left(\frac{-1}{n^s} \right) \\
 = & \lim_{s \rightarrow 1} \left(-\frac{d}{ds} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} \right) \right) \\
 = & \lim_{s \rightarrow 1} \left(\frac{-d\zeta(s)}{ds} \right) \\
 = & \lim_{s \rightarrow 1} \frac{\zeta'(s)}{\zeta^2(s)} \\
 = & -1
 \end{aligned} \tag{8.10}$$

folgt

$$\begin{aligned}
& \left(\gamma + \log(t) \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n) \log(n)}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(n) t^k}{n^{k+1} \cdot k \cdot k!} \\
= & 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{t^k}{k \cdot k!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^{k+1}} \right) \\
= & 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k \cdot k! \cdot \zeta(k+1)} \\
= & 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\log(x))^k}{k \cdot k! \cdot \zeta(k+1)}
\end{aligned} \tag{8.11}$$

■

In dieser Arbeit berechnen wir praktisch keine Werte $\pi(x)$, $\text{li}(x)$ bzw. $R(x)$. Wir ergänzen lediglich einige Tabellen aus der Literatur wie etwa [61], [60, Seiten 380–383] und [57, Seite 238]². Daraus zeichnen wir Graphen für $R(x) - \pi(x)$; $\text{li}(x) - \pi(x)$ sowie $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ als Funktion in x , die wir schließlich kommentieren werden.

Aus den Tabellen (siehe Anhang B ab Seite 117) und den Diagrammen (siehe Anhang D ab Seite 190; Anhang E ab Seite 209; Anhang F ab Seite 228) fällt auf, dass für $x \leq 1000$ alle drei Graphen $R(x) - \pi(x)$; $\text{li}(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ ziemlich parallel und nahe zur x -Achse verlaufen. Je mehr ($x - 1000$) sich vergrößert, um so weiter entfernt sich der Graph $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ von den beiden Graphen $R(x) - \pi(x)$ und $\text{li}(x) - \pi(x)$ sowie von der x -Achse (nach unten). Daher haben wir jedes Mal außerdem die Graphen $R(x) - \pi(x)$; $\text{li}(x) - \pi(x)$ gemeinsam auf ein separates Diagramm gezeichnet, um diese beiden Graphen besser vergleichen zu können. Dabei haben wir festgestellt, dass zwar diese beide Graphen immerhin parallel verlaufen, aber der Graph $R(x) - \pi(x)$ um die x -Achse schwingt und näher zur x -Achse als der Graph $\text{li}(x) - \pi(x)$ ist. Diese Beobachtungen bestätigen nicht nur die grobe Tatsache, dass für den betrachteten Bereich $x \leq 10^{18}$ $R(x)$; $\text{li}(x)$ sowie $\frac{x}{\log(x)}$ die Anzahl-

²Wir konnten Übereinstimmung in den drei Quellen bis auf $x = 3 \cdot 10^{17}$ feststellen. Für $x = 3 \cdot 10^{17}$ haben wir festgestellt, dass die Werte für $\pi(x)$, $\text{li}(x) - \pi(x)$ und $R(x) - \pi(x)$ aus [60] sowie [57] zwar übereinstimmen, unterscheiden sie sich aber von den Werten aus [61]. (man vgl. Tabelle B.17 auf Seite 134 dieser Arbeit)

funktion $\pi(x)$ annähern, sondern auch, dass $R(x)$ die bessere Approximation für $\pi(x)$ von allen drei ist.

Zusammenfassung

Bereits EUKLID wusste, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. EULER zeigte die qualitative Aussage $\frac{\pi(x)}{x} \rightarrow 0$ bei $x \rightarrow \infty$. LEGENDRE definierte als erster die Anzahlfunktion $\pi(x)$ als die Anzahl aller Primzahlen $\leq x$, ($x \in \mathbb{R}$) und vermutete irrtümlicherweise, dass $\pi(x) = \frac{x}{\log(x)-B}$; wobei $\lim_{x \rightarrow \infty} B(x) = 1,083\,66\dots$ ist. GAUSS vermutete, dass die Funktionen $\pi(x)$ und

$$li(x) := \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \left(\int_{u=0}^{u=1-\varepsilon} \frac{du}{\log(u)} + \int_{u=1+\varepsilon}^{u=x} \frac{du}{\log(u)} \right)$$

asymptotisch äquivalent sind. TSCHEBYSCHEW konnte die LEGENDRESche Vermutung widerlegen; außerdem bewies er: Wenn der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x \log(x)}$ existiert, so muss dieser gleich 1 sein. Dank wegweisender Vorarbeiten von RIEMANN, gelang es im Jahr 1896 unabhängig voneinander und nahezu zeitgleich HADAMARD und DE LA VALLÉE POUSSIN, den Primzahlsatz analytisch zu beweisen. Beide verwendeten entscheidend die Tatsache, dass die Zetafunktion ζ in der Halbebene $\operatorname{Re}(s) \geq 1$ nicht verschwindet. Die Beweise waren zuerst so lang und kompliziert, dass sie heutzutage nur noch einen historischen Wert besitzen. Es dauerte weitere 84 Jahre bis der Beweis so vereinfacht werden konnte, dass er nur wenige Seiten in Anspruch nimmt. Ein wichtiger Verdienst kommt hierbei der Arbeit von NEWMAN aus dem Jahre 1980 zu. Lange Zeit wurde es für kaum möglich gehalten, einen

Beweis des Primzahlsatzes zu finden, der ohne eine gewisse Kenntnis der komplexen Nullstellen der Zetafunktion auskommt. Und doch glückte 1948 ein solcher Beweis durch SELBERG und ERDÖS mit elementaren Mitteln. Erwähnenswert dabei, dass der Beweis noch lange nicht einfach ist. Uns schienen die analytischen Beweise durchsichtiger zu sein. Daher haben wir in dieser Arbeit auf einen elementaren Beweis verzichtet.

Der analytischen Weg zum Primzahlsatz von NEWMAN kommt einerseits mit Integration längs endlicher Wege (und der Tatsache $\zeta(s) \neq 0$ in $\sigma \geq 1$) aus, umgeht also Abschätzungen bei ∞ ; andererseits ist er frei von Sätzen der FOURIER-Analyse.

Beim Beweis des Primzahlsatzes von WOLKE benutzt man anstelle von $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ die Funktion $\zeta^{\frac{1}{k}}$ mit großen k . Wegen des Pols bei $s=1$ bringt dies bei der Integration leichte Komplikationen, hat aber den Vorteil, dass außer der Nullstellen-Freiheit keine nichttriviale Abschätzung für ζ oder ζ' erforderlich ist.

Dank der elementaren Äquivalenz zwischen dem Primzahlsatz und der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n}$ brauchte NEWMAN nur die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n}$ zu zeigen. Dies erreichte er mit Hilfe seines Konvergenzsatzes.

Die LEGENDRESche Formel, die auf dem Sieb des ERATOSTHENES basiert, erlaubt die exakte Berechnung von $\pi(x)$, wenn alle \sqrt{x} nicht übersteigenden Primzahlen bekannt sind. Diese prinzipielle Möglichkeit zur Ermittlung von $\pi(x)$ ist in der Praxis natürlich stark limitiert durch die mit x rasch anwachsende Anzahl der rechts in der LEGENDRESche Formel zu berücksichtigenden Summanden. Mit verfeinerten Siebtechniken haben verschiedene Autoren zur LEGENDRESche Formel analoge Formeln $\pi(x)$

ersonnen, bei denen der genannte Nachteil von LEGENDRESche Formel sukzessive reduziert wurde. Zu erwähnen sind hier vor allem MEISSEL, LEHMER, sowie LAGARIAS, MILLER und ODLYZKO.

Aus den Graphen von $R(x) - \pi(x)$; $li(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ für den betrachteten Bereich $x \leq 10^{18}$ konnten wir feststellen, dass $R(x)$; $li(x)$ sowie $\frac{x}{\log(x)}$ die Anzahlfunktion $\pi(x)$ annähern, wobei $R(x)$ die beste Approximation für $\pi(x)$ von allen drei ist.

Schlusswort

Erst 1896 gelang dem Franzosen JACQUES–SOLOMON HADAMARD und dem Belgier CHARLES DE LA VALLÉE–POUSSIN der Beweis des Primzahlsatzes – einer Formel, nach der sich näherungsweise die Anzahl der Primzahlen unterhalb eines bestimmten Wertes angeben lässt. So bedeutende Mathematiker wie LEONHARD EULER, CARL FRIEDRICH GAUSS und BERNHARD RIEMANN hatten sich zuvor mehr als ein Jahrhundert lang vergeblich über dieses Problem den Kopf zerbrochen.

Der Beweis des Primzahlsatzes setzte eine Flut von Erkenntnissen frei, warf aber zugleich auch eine Fülle neuer mathematischer Probleme auf, die zum Teil bis heute nicht gelöst werden konnten. Offen zum Beispiel ist nach wie vor die Frage, ob es endlich viele Paare von Primzahlen gibt, die sich, wie $(3, 5)$, $(17, 19)$ oder $(21, 23)$ aber auch $570918348 \cdot 10^{5120} \pm 1^\dagger$ sowie $242206083 \cdot 2^{38880} \pm 1^\ddagger$ und $697053813 \cdot 2^{16352} \pm 1^{\dagger\dagger}$ nur um den Wert zwei unterscheiden.

Während sich für den Primzahlsatz selbst und seine Implikationen überwiegend die Spezialisten, Zahlentheoretiker etwa, begeistern, haben

[†]Diese Primzahlzwillinge sind von DUBNER im Jahre 1995 entdeckt. [57, Seite 264], [22]

[‡]Diese Primzahlzwillinge sind von INDLEKOFER und JÁRAI in November 1995 entdeckt siehe [22]

^{††}Diese Primzahlzwillinge sind von INDLEKOFER und JÁRAI im Jahre 1996 entdeckt [30] und gelten (wahrscheinlich heute noch) als die größte bekannten Primzahlzwillingen.

die Primzahlen insgesamt in jüngster Zeit auch praktische Bedeutung erlangt, zum Beispiel in der Kodierung und im Datenschutz. Ideen und Methoden, die im Zusammenhang mit dem Primzahlsatz entwickelt wurden, haben außerdem weite Gebiete der Mathematik entscheidend beeinflusst – zu denken wäre hier beispielsweise an die Funktionentheorie, die auf zahlreichen Wissenschaftsfeldern eine große Rolle spielt.

Diese Arbeit sollte andeuten, dass Untersuchungen über die Verteilung der Primzahlen auch heute, noch grob eineinhalb Jahrhunderte nach DIRICHLETS und RIEMANNS Ansätzen, faszinierend sein können, weil einerseits die Primzahlen im kleinen außerordentlich zufällig verteilt zu sein scheinen, andererseits ihre Verteilung im großen von erstaunlicher Regelmäßigkeit ist. Dem Gebiet mangelt es nicht an tiefen Problemen, die zum Teil schon vor langer Zeit aufgeworfen worden sind, aber trotz der vielen in der Zwischenzeit entwickelten scharfsinnigen Methoden noch immer ungelöst sind. Dies lässt hoffen, dass das Gebiet noch lange aktuell bleiben wird.

Anhang A

Symbolverzeichnis

In diesem Abschnitt stellen wir Symbolen und Notationen zusammen. Die meistens entsprechen denen aus der Literatur wie [9], aber hier für die Bedürfnisse dieser Arbeit angepaßt sind.

\mathbb{P}	Menge der Primzahlen
\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen (ohne Null)
\mathbb{N}_0	Menge der natürlichen Zahlen (mit Null)
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
\mathbb{C}	Menge der Komplexen Zahlen
■	Ende eines Beweises
□	Ende einer Definition, einer Bemerkung, eines Beispieles
\in	Ist Element
\notin	Ist nicht Element
\subset	Ist enthalten in
\cap	Durchschnitt von Mengen
\cup	Vereinigung von Mengen
$\bar{\cup}$	Disjunkte Vereinigung von Mengen; d.h. $A \bar{\cup} B := A \cup B$, falls $A \cap B = \emptyset$
\emptyset	Leere Menge

$\#M$	Anzahl der Elemente der (endlichen) Menge M
$]a, b[$	Offene Intervalle
$[a, b[,]a, b]$	Halboffene Intervalle
$[a, b]$	Abgeschlossene Intervalle
XY	$\{x \cdot y x \in X \text{ und } y \in Y\}$
O, o, \sim	LANDAUSchen Notationen
\lim	Limes
$\overline{\lim}$	Limes superior
$\underline{\lim}$	Limes inferior
$n!$	n Fakultät
$\text{ggT}(m, n)$	Größter gemeinsamer Teiler
(a_1, a_2, \dots, a_k)	k-tupel
$p n$	p teilt n
$p\$$	Das Produkt aller Primzahlen $\leq p$
$p(n)$	Der kleinste Primteiler von n.
$\varphi(x)$	EULERSche Phifunktion
$\phi(x, a)$	LEGENDRE-Summe; das ist die Anzahl aller Zahlen $\leq x$, die weder durch p_1 , noch durch p_2, \dots , noch durch p_a teilbar sind.
$P_k(x, a)$	Anzahl der Zahlen $\leq x$, deren Primfaktorzerlegung genau aus k Primzahlen (nicht notwendigerweise verschieden) $p \geq p_{a+1}$ besteht.
p_j	Die j.te Primzahl: $p_1 = 2$; $p_2 = 3$; $p_3 = 5$; $p_4 = 7$; $p_5 = 11$;...
$\nu_p(n)$	Die Vielfachheit von p in (der Primfaktorzerlegung von) n
$\binom{x}{k}$	Binomialkoeffizient x über k ($x \in \mathbb{R}$; $k \in \mathbb{N}$) $:= \prod_{j=1}^k \frac{x-j+1}{j}$; $\binom{x}{0} = 1$
$f * g$	Faltung zweier zahlentheoretischer Funktionen f und g

$a :\Leftrightarrow b$	a ist definiert als durch b
$a:=b$	a ist definiert als durch b
$a \Rightarrow b$	aus a folgt b
$a \Leftrightarrow b$	a und b sind gleichwertig
\sum	Summenzeichen
\prod	Produktzeichen
$[x]$	entier(x) d.h. $[x] \leq x < [x] + 1$ und $[x] \in \mathbb{N}$
$\langle x \rangle$	$x - [x]$
$s := \sigma + it$	Komplexe Zahl mit Realteil $\operatorname{Re}(s)=\sigma$ und Imaginärteil $\operatorname{Im}(s)=t$
$\operatorname{Re}(s)$	Realteil einer komplexen Zahl s.
$\operatorname{Im}(s)$	Imaginärteil einer komplexen Zahl s.
$s := s e^{i\theta}$	Komplexe Zahl mit Betrag $ s $ und Argument θ
$\arg(s)$	Argument einer komplexen Zahl s
$ s $	Absolutbetrag einer reellen oder komplexen Zahl s
$\operatorname{Res} f(s)$	Residuen
$\ \cdot \ _X$	Supremum Norm auf X, d. h. $\ f\ _X := \sup_{x \in X} f(x) $
$f^r(x)$	$(f(x))^r$, $r \in \mathbb{R}$
$f(s) \Big _{s=z}$	Der Wert von f(s) an der Stelle s=z
$f'(x), \frac{d}{dx}f(x)$	Ableitung der Funktion f(x) bezüglich x
$\int_K f(s)ds$	Kurvenintegral von f längs der Kurve K
$\int_{x=a}^{x=b} f(x)dx$	RIEMANNSche Integral
$\left(\int + \int + \dots + \int \right) f(x)dx$	$\int f(x)dx + \int f(x)dx + \dots + \int f(x)dx$
$\zeta(x)$	RIEMANNSche Zetafunktion
$\Gamma(x)$	Die Gammafunktion
$\Lambda(x)$	MANGOLDT-Funktion

$\Psi(x)$	TSCHEBYSCHEW –Funktion: $= \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$
$\theta(x)$	TSCHEBYSCHEW –Funktion: $= \sum_{p \leq x} \log(p)$
$\mu(x)$	MÖBIUS–Funktion
$\omega(n)$	Die Anzahl der Primteiler von n
$\pi(x)$	Anzahl der Primzahlen x
$li(x)$	Integrallogarithmus
$R(x)$	Die Funktion $R(x)$
$\sqrt[k]{s}$	k-te Wurzel von s
$s^{\frac{1}{k}}$	k-te Wurzel von s
\sin	Sinus
\cos	Kosinus
$\exp(x)$	Exponentialfunktion
e^x	Exponentialfunktion
\log	Natürlicher Logarithmus
$2,3$	2 komma 3
$2 \cdot 3$	2 mal 3
$\gamma = 0,577\,215\,66\dots$	die EULER–MASHERONISCHE Konstante
$e=2,718\,281\,828\dots$	die EULERSCHE Zahl
B_0, B_1, B_2, \dots	BERNOULLI–Zahlen

Tabelle A.1: Notationen

Anhang B

datenMatLab: $R(x)$; $li(x)$;

$\frac{x}{\log(x)}$ und $\pi(x)$

x	$\pi(x)$	R(x)(gerundet)	li(x)(gerundet)	$\frac{x}{\log(x)}$ (gerundet)	R(x) - $\pi(x)$	li(x) - $\pi(x)$	$\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$
10	4	5	6	4	1	2	0
20	8	8	10	7	0	2	-1
30	10	10	13	9	0	3	-1
40	12	13	16	11	1	4	-1
50	15	15	18	13	0	3	-2
60	17	17	21	15	0	4	-2
70	19	19	23	16	0	4	-3
80	22	22	26	18	0	4	-4
90	24	24	28	20	0	4	-4
100	25	26	30	22	1	5	-3

Tabelle B.1: datenMatLab01.mat ($10 \leq x \leq 10^2$)

x	$\pi(x)$	R(x)(gerundet)	li(x)(gerundet)	$\frac{x}{\log(x)}$ (gerundet)	R(x) - $\pi(x)$	li(x) - $\pi(x)$	$\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$
100	25	26	30	22	1	5	-3
200	46	45	50	38	-1	4	-8
300	62	62	68	53	0	6	-9
400	78	78	85	67	0	7	-11
500	95	94	102	80	-1	7	-15
600	109	110	118	94	1	9	-15
700	125	125	133	107	0	8	-18
800	139	140	148	120	1	9	-19
900	154	154	163	132	0	9	-22
10 ³	168	168	178	145	0	10	-23

Tabelle B.2: datenMatLab02.mat ($10^2 \leq x \leq 10^3$)

x	$\pi(x)$	R(x)(gerundet)	li(x)(gerundet)	$\frac{x}{\log(x)}$ (gerundet)	R(x)- $\pi(x)$	li(x)- $\pi(x)$	$\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$
$1 \cdot 10^3$	168	168	178	145	0	10	-23
$2 \cdot 10^3$	303	303	315	263	0	12	-40
$3 \cdot 10^3$	430	430	443	375	0	13	-55
$4 \cdot 10^3$	550	551	565	482	1	15	-68
$5 \cdot 10^3$	669	669	684	587	0	15	-82
$6 \cdot 10^3$	783	784	800	690	1	17	-93
$7 \cdot 10^3$	900	897	914	791	-3	14	-109
$8 \cdot 10^3$	1007	1009	1026	890	2	19	-117
$9 \cdot 10^3$	1117	1118	1137	988	1	20	-129
$1 \cdot 10^4$	1229	1 227	1246	1086	-2	17	-143

Tabelle B.3: datenMatLab03.mat ($10^3 \leq x \leq 10^4$)

x	$\pi(x)$	R(x)(gerundet)	li(x)(gerundet)	$\frac{x}{\log(x)}$ (gerundet)	R(x)- $\pi(x)$	li(x)- $\pi(x)$	$\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$
$1 \cdot 10^4$	1229	1227	1246	1086	-2	17	-143
$2 \cdot 10^4$	2262	2264	2289	2019	2	27	-243
$3 \cdot 10^4$	3245	3249	3277	2910	4	32	-335
$4 \cdot 10^4$	4203	4202	4233	3775	-1	30	-428
$5 \cdot 10^4$	5133	5133	5167	4621	0	34	-512
$6 \cdot 10^4$	6057	6048	6083	5454	-9	26	-603
$7 \cdot 10^4$	6935	6948	6985	6275	13	50	-660
$8 \cdot 10^4$	7837	7837	7876	7086	0	39	-751
$9 \cdot 10^4$	8713	8716	8757	7890	3	44	-823
$1 \cdot 10^5$	9592	9587	9630	8686	-5	38	-906

Tabelle B.4: datenMatLab04.mat ($10^4 \leq x \leq 10^5$)

x	$\pi(x)$	R(x)(gerundet)	li(x)(gerundet)	$\frac{x}{\log(x)}$ (gerundet)	R(x) - $\pi(x)$	li(x) - $\pi(x)$	$\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$
$1 \cdot 10^5$	9592	9587	9630	8686	-5	38	-906
$2 \cdot 10^5$	17984	17982	18036	16385	-2	52	-1599
$3 \cdot 10^5$	25997	26023	26087	23788	26	90	-2209
$4 \cdot 10^5$	33860	33852	33923	31010	-8	63	-2850
$5 \cdot 10^5$	41538	41530	41606	38103	-8	68	-3435
$6 \cdot 10^5$	49098	49091	49173	45097	-7	75	-4001
$7 \cdot 10^5$	56543	56557	56645	52010	14	102	-4533
$8 \cdot 10^5$	63951	63943	64037	58857	-8	86	-5094
$9 \cdot 10^5$	71274	71266	71362	65645	-8	88	-5629
$1 \cdot 10^6$	78498	78527	78628	72382	29	130	-6116

Tabelle B.5: datenMatLab05.mat ($10^5 \leq x \leq 10^6$)

x	$\pi(x)$	R(x)(gerundet)	li(x)(gerundet)	$\frac{x}{\log(x)}$ (gerundet)	R(x) - $\pi(x)$	li(x) - $\pi(x)$	$\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$
$1 \cdot 10^6$	78498	78527	78628	72382	29	130	-6116
$2 \cdot 10^6$	148933	148924	149055	137849	-9	122	-11084
$3 \cdot 10^6$	216816	216816	216971	201152	0	155	-15664
$4 \cdot 10^6$	283146	283179	283352	263127	33	206	-20019
$5 \cdot 10^6$	348513	348449	348638	324150	-64	125	-24363
$6 \cdot 10^6$	412849	412873	413077	384436	24	228	-28413
$7 \cdot 10^6$	476648	476610	476827	444122	-38	179	-32526
$8 \cdot 10^6$	539777	539771	540000	503304	-6	223	-36473
$9 \cdot 10^6$	602489	602436	602676	562053	-53	187	-40436
$1 \cdot 10^7$	664579	664667	664918	620421	88	339	-44158

Tabelle B.6: datenMatLab06.mat ($10^6 \leq x \leq 10^7$)

x	$\pi(x)$	R(x)(gerundet)	li(x)(gerundet)	$\frac{x}{\log(x)}$ (gerundet)	R(x) - $\pi(x)$	li(x) - $\pi(x)$	$\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$
$1 \cdot 10^7$	664579	664667	664918	620421	88	339	-44158
$2 \cdot 10^7$	1270607	1270571	1270896	1189680	-36	289	-80927
$3 \cdot 10^7$	1857859	1857818	1858213	1742493	-41	354	-115366
$4 \cdot 10^7$	2433654	2433570	2434016	2285141	-84	362	-148513
$5 \cdot 10^7$	3001134	3001067	3001557	2820471	-67	423	-180663
$6 \cdot 10^7$	3562115	3562154	3562683	3350111	39	568	-212004
$7 \cdot 10^7$	4118064	4118020	4118585	3875109	-44	521	-242955
$8 \cdot 10^7$	4669382	4669493	4670091	4396199	111	709	-273183
$9 \cdot 10^7$	5216954	5217182	5217910	4913919	228	956	-303035
$1 \cdot 10^8$	5761455	5761552	5762209	5428681	97	754	-332774

Tabelle B.7: datenMatLab07.mat ($10^7 \leq x \leq 10^8$)

x	$\pi(x)$	R(x)(gerundet)	li(x)(gerundet)	$\frac{x}{\log(x)}$ (gerundet)	R(x) - $\pi(x)$	li(x) - $\pi(x)$	$\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$
$1 \cdot 10^8$	5761455	5761552	5762209	5428681	97	754	-332774
$2 \cdot 10^8$	11078937	11079090	11079975	10463629	153	1038	-615308
$3 \cdot 10^8$	16252325	16252355	16253409	15369409	30	1084	-882916
$4 \cdot 10^8$	21336326	21336185	21337378	20194906	-141	1052	-1141420
$5 \cdot 10^8$	26355867	26355517	26356832	24962408	-350	965	-1393459
$6 \cdot 10^8$	31324703	31324622	31326045	29684689	-81	1342	-1640014
$7 \cdot 10^8$	36252931	36252719	36254242	34370013	-212	1311	-1882918
$8 \cdot 10^8$	41146179	41146248	41147862	39024157	69	1683	-2122022
$9 \cdot 10^8$	46009215	46009949	46011649	43651379	734	2434	-2357836
$1 \cdot 10^9$	50847534	50847455	50849235	48254942	-79	1701	-2592592

Tabelle B.8: datenMatLab08.mat ($10^8 \leq x \leq 10^9$)

x	$\pi(x)$	R(x) (gerundet)	li(x) (gerundet)	$\frac{x}{\log(x)}$ (gerundet)	R(x) - $\pi(x)$	li(x) - $\pi(x)$	$\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$
$1 \cdot 10^9$	50847534	50847455	50849235	48254942	-79	1701	-2592592
$2 \cdot 10^9$	98222287	98222889	98225302	93386320	602	3015	-4835967
$3 \cdot 10^9$	144449537	144449842	144452729	137476710	305	3192	-6972827
$4 \cdot 10^9$	189961812	189961312	189964591	180917212	-500	2779	-9044600
$5 \cdot 10^9$	234954223	234955160	234958781	223886908	937	4558	-11067315
$6 \cdot 10^9$	279545368	279544940	279548867	266488708	-428	3499	-13056660
$7 \cdot 10^9$	323804352	323804214	323808420	308789345	-138	4068	-15015007
$8 \cdot 10^9$	367783654	367784432	367788896	350835533	778	5242	-16948121
$9 \cdot 10^9$	411523195	411523549	411528254	392661755	354	5059	-18861440
$1 \cdot 10^{10}$	455052511	455050683	455055615	434294482	-1828	3104	-20758029

Tabelle B.9: datenMatLab09.mat ($10^9 \leq x \leq 10^{10}$)

x	$\pi(x)$	R(x)(gerundet)	li(x)(gerundet)	$\frac{x}{\log(x)}$ (gerundet)	R(x)- $\pi(x)$	li(x)- $\pi(x)$	$\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$
$1 \cdot 10^{10}$	455052511	455050683	455055615	434294482	-1828	3104	-20758029
$2 \cdot 10^{10}$	882206716	882208153	882214879	843205936	1437	8163	-39000780
$3 \cdot 10^{10}$	1300005926	1300008060	1300016132	1243550985	2134	10206	-56454941
$4 \cdot 10^{10}$	1711955433	1711954943	1711964132	1638528672	-490	8699	-73426761
$5 \cdot 10^{10}$	2119654578	2119656377	2119666539	2029608840	1799	11961	-90045738
$6 \cdot 10^{10}$	2524038155	2524037283	2524048318	2417638082	-872	10163	-106400073
$7 \cdot 10^{10}$	2925699539	2925697988	2925709819	2803166336	-1551	10280	-122533203
$8 \cdot 10^{10}$	3325059246	3325059024	3325071592	3186579088	-222	12346	-138480158
$9 \cdot 10^{10}$	3722428991	3722431004	3722444262	3568161225	2013	15271	-154267766
$1 \cdot 10^{11}$	4118054813	4118052495	4118066401	3948131654	-2318	11588	-169923159

Tabelle B.10: datenMatLab10.mat ($10^{10} \leq x \leq 10^{11}$)

x	$\pi(x)$	R(x)(gerundet)	li(x)(gerundet)	$\frac{x}{\log(x)}$ (gerundet)	R(x) - $\pi(x)$	li(x) - $\pi(x)$	$\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$
$1 \cdot 10^{11}$	4118054813	4118052495	4118066401	3948131654	-2318	11588	-169923159
$2 \cdot 10^{11}$	8007105059	8007099352	8007118404	7685927426	-5707	13345	-321177633
$3 \cdot 10^{11}$	11818439135	11818439950	11818462902	11352005584	815	23767	-466433551
$4 \cdot 10^{11}$	15581005657	15581015340	15581041471	14973012800	9683	35814	-607992857
$5 \cdot 10^{11}$	19308136142	19308142794	19308171728	18561227259	6652	35586	-746908883
$6 \cdot 10^{11}$	23007501786	23007500528	23007531978	22123734328	-1258	30192	-883767458
$7 \cdot 10^{11}$	26684074310	26684079990	26684113738	25665143193	5680	39428	-1018931117
$8 \cdot 10^{11}$	30341383527	30341382157	30341418033	29188688475	-1370	34506	-1152695052
$9 \cdot 10^{11}$	33981987586	33981995669	33982033534	32696762961	8083	45948	-1285224625
$1 \cdot 10^{12}$	37607912018	37607910542	37607950281	36191206825	-1476	38263	-1416705193

Tabelle B.11: datenMatLab11.mat ($10^{11} \leq x \leq 10^{12}$)

x	$\pi(x)$	R(x)(gerundet)	li(x)(gerundet)	$\frac{x}{\log(x)}$ (gerundet)	R(x)- $\pi(x)$	li(x)- $\pi(x)$	$\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$
$1 \cdot 10^{12}$	37607912018	37607910542	37607950281	36191206825	-1476	38263	-1416705193
$2 \cdot 10^{12}$	73301896139	73301889707	73301944334	70611075992	-6432	48195	-2690820147
$3 \cdot 10^{12}$	108340298703	108340313799	108340379630	104421798836	15096	80927	-3918499867
$4 \cdot 10^{12}$	142966208126	142966194812	142966269974	137848727018	-13314	61848	-5117481108
$5 \cdot 10^{12}$	177291661649	177291650467	177291733775	170995947606	-11182	72126	-6295714043
$6 \cdot 10^{12}$	211381427039	211381435708	211381526328	203923622468	8669	99289	-7457804571
$7 \cdot 10^{12}$	245277688804	245277702288	245277799594	236670935781	13484	110790	-8606753023
$8 \cdot 10^{12}$	279010070811	279010046791	279010150289	269265413070	-24020	79478	-9744657741
$9 \cdot 10^{12}$	312600354108	312600372650	312600481939	301727432869	18542	127831	-10872921239
$1 \cdot 10^{13}$	346065536839	346065531066	346065645810	334072678387	-5773	108971	-11992858452

Tabelle B.12: datenMatLab12.mat ($10^{12} \leq x \leq 10^{13}$)

x	$\pi(x)$	R(x)(gerundet)	li(x)(gerundet)	$\frac{x}{\log(x)}$ (gerundet)	R(x)- $\pi(x)$	li(x)- $\pi(x)$	$\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$
$1 \cdot 10^{13}$	346065536839	346065531066	346065645810	334072678387	-5773	108971	-11992858452
$2 \cdot 10^{13}$	675895909271	675895921465	675896079627	653023836567	12194	170356	-22872072704
$3 \cdot 10^{13}$	1000121668853	1000121635320	1000121826206	966737199351	-33533	157353	-33384469502
$4 \cdot 10^{13}$	1320811971702	1320811975185	1320812193348	1277143262653	3483	221646	-43668709049
$5 \cdot 10^{13}$	1638923764567	1638923775604	1638924017600	1585135531233	11037	253033	-53788233334
$6 \cdot 10^{13}$	1955010428258	1955010488763	1955010752166	1891231155811	60505	323908	-63779272447
$7 \cdot 10^{13}$	2269432871304	2269432785873	2269433068856	2195767313844	-85431	197552	-73665557460
$8 \cdot 10^{13}$	2582444113487	2582444140007	2582444441131	2498981059949	26520	327644	-83463053538
$9 \cdot 10^{13}$	2894232250783	2894232280953	2894232599049	2801048021407	30170	348266	-93184229376
$1 \cdot 10^{14}$	3204941750802	3204941731602	3204942065692	3102103442166	-19200	314890	-102838308636

Tabelle B.13: datenMatLab13.mat ($10^{13} \leq x \leq 10^{14}$)

x	$\pi(x)$	R(x)(gerundet)	li(x)(gerundet)	$\frac{x}{\log(x)}$ (gerundet)	R(x) - $\pi(x)$	li(x) - $\pi(x)$	$\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$
$1 \cdot 10^{14}$	3204941750802	3204941731602	3204942065692	3102103442166	-19200	314890	-102838308636
$2 \cdot 10^{14}$	6270424651315	6270424721723	6270425183240	6073611229889	70408	531925	-196813421426
$3 \cdot 10^{14}$	9287441600280	9287441477521	9287442035206	8999603048051	-122759	434926	-287838552229
$4 \cdot 10^{14}$	12273824155491	12273824085068	12273824722983	11896800373678	-70423	567492	-377023781813
$5 \cdot 10^{14}$	15237833654620	15237833759161	15237834467221	14772956260716	104541	812601	-464877393904
$6 \cdot 10^{14}$	18184255291570	18184255051164	18184255822257	17632563419270	-240406	530687	-551691872300
$7 \cdot 10^{14}$	21116208911023	21116208956646	21116209785415	20478553695829	45623	874392	-637655215194
$8 \cdot 10^{14}$	24035890368161	24035890570414	24035891452638	23312989844781	202253	1084477	-722900523380
$9 \cdot 10^{14}$	26944926466221	26944926713710	26944927645955	26137401039619	247489	1179734	-807525426602
$1 \cdot 10^{15}$	29844570422669	29844570495887	29844571475288	28952965460217	73218	1052619	-891604962452

Tabelle B.14: datenMatLab14.mat ($10^{14} \leq x \leq 10^{15}$)

x	$\pi(x)$	R(x) (gerundet)	li(x) (gerundet)	$\frac{x}{\log(x)}$ (gerundet)	R(x) - $\pi(x)$	li(x) - $\pi(x)$	$\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$
$1 \cdot 10^{15}$	29844570422669	29844570495887	29844571475288	28952965460217	73218	1052619	-891604962452
$2 \cdot 10^{15}$	58478215681891	58478215644260	58478216999682	56766698977301	-37631	1317791	-1711516704590
$3 \cdot 10^{15}$	86688602810119	86688603043166	86688604682699	84181252073117	233047	1872580	-2507350737002
$4 \cdot 10^{15}$	114630988904000	114630988391311	114630990268039	111342856557312	-512689	1364039	-3288132346688
$5 \cdot 10^{15}$	142377417196364	142377417389761	142377419473972	138319418975672	193397	2277608	-4057998220692
$6 \cdot 10^{15}$	169969662554551	169969662169857	169969664440592	165150330356743	-384694	1886041	-4819332197808
$7 \cdot 10^{15}$	197434994078331	197434993934197	197434995375659	191861316707891	-144134	1297328	-5573677370440
$8 \cdot 10^{15}$	224792606318600	224792606446529	224792609046271	218470489575793	127929	2727671	-6322116742807
$9 \cdot 10^{15}$	252056733453928	252056732662071	252056735409959	244991282714721	-791857	1956031	-7065450739207
$1 \cdot 10^{16}$	279238341033925	279238341360977	279238344248557	271434051189532	327052	3214632	-7804289844393

Tabelle B.15: datenMatLab15.mat ($10^{15} \leq x \leq 10^{16}$)

x	$\pi(x)$	R(x)(gerundet)	li(x)(gerundet)	$\frac{x}{\log(x)}$ (gerundet)	R(x)- $\pi(x)$	li(x)- $\pi(x)$	$\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$
$1 \cdot 10^{16}$	279238341033925	279238341360977	279238344248557	271434051189532	327052	3214632	-7804289844393
$2 \cdot 10^{16}$	547863431950008	547863431724133	547863435726496	532842994606810	-225875	3776488	-15020437343198
$3 \cdot 10^{16}$	812760276789503	812760276595604	812760281441104	790722739469166	-193899	4651601	-22037537320337
$4 \cdot 10^{16}$	1075292778753150	1075292778742170	1075292784292010	1046362878173200	-10980	5538861	-28929900579949
$5 \cdot 10^{16}$	1336094767763971	1336094768575620	1336094774741860	1300363081646600	811655	6977890	-35731686117366
$6 \cdot 10^{16}$	1595534099589274	1595534098441550	1595534105162110	1553071522918790	-1147719	5572837	-42462576670481
$7 \cdot 10^{16}$	1853851099626620	1853851100624230	1853851107852310	1804715749413470	997606	8225687	-49135350213155
$8 \cdot 10^{16}$	2111215026220444	2111215024730540	2111215032429260	2055456048509330	-1489898	6208817	-55758977711106
$9 \cdot 10^{16}$	2367751438410550	2367751439306230	2367751447445540	2305411365298750	895676	9034988	-62340073111798
$1 \cdot 10^{17}$	2623557157654233	2623557157055970	2623557165610820	2554673422960300	-598255	7956589	-68883734693925

Tabelle B.16: datenMatLab16.mat ($10^{16} \leq x \leq 10^{17}$)

x	$\pi(x)$	R(x)(gerundet)	li(x)(gerundet)	$\frac{x}{\log(x)}$ (gerundet)	R(x)- $\pi(x)$	li(x)- $\pi(x)$	$\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$
10^{17}	2623557157654233	2623557157055970	2623557165610820	2554673422960300	-598255	7956589	-68883734693925
$2 \cdot 10^{17}$	5153329362645908	5153329361629770	5153329373502970	5020446551587920	-1016134	10857072	-132882811057982
$3 \cdot 10^{17}$	7650011911275069	7650011911427920	7650011925813060	7454794337814150	152863	14538005	-195217573460905
$3 \cdot 10^{17}$	7650011911220803	7650011911427920	7650011925813060	7454794337814150			
$4 \cdot 10^{17}$	10125681208311322	10125681211635300	10125681228120000	9869173997071170	3323994	19808695	-256507211240128
$5 \cdot 10^{17}$	12585956566571620	12585956567319100	12585956585641900	12268919654557700	747495	19070319	-317036912013868
$6 \cdot 10^{17}$	15034102021263820	15034102021872900	15034102041849200	14657130849661800	609065	20585416	-376971171602028
$7 \cdot 10^{17}$	17472251499627256	17472251496532000	17472251518022700	17035834527252200	-3095204	18395468	-436416972374954
$8 \cdot 10^{17}$	19901908567967065	19901908561834800	19901908584730000	19406459207602800	-6132224	16763001	-495449360364192
$9 \cdot 10^{17}$	22324189231374849	22324189233452200	22324189257662600	21770065404175700	2077405	26287786	-554123827199052
10^{18}	24739954287740860	24739954284239400	24739954309690400	24127471216847300	-3501366	21949555	-612483070893476

Tabelle B.17: datenMatLab17.mat ($10^{17} \leq x \leq 10^{18}$)

Anhang C

Listing der MatLab M-Files

```
1 %*****
2 %Mohamed NAJI
3 %TwoAxes01.m
4 %*****
5 load datenMatLab01.mat;
6 x=1.0000e+1 :1.0000e+1: 1.0000e+2;
7 h11 = line(x,datenMatLab01(:,8),'Color',...
8           'k','LineWidth',2.5,'LineStyle',':');
9 legend('log(x)/x-\pi(x)',0);
10 ylabel('log(x)/x-\pi(x)');
11 ax1 = gca;
12 set(ax1,'YColor','k');
13 ax2 = axes('Position',get(ax1,'Position'),...
14           'YAxisLocation','right',...
15           'Color','none',...
16           'YColor','b');
17 h12 = line(x,datenMatLab01(:,7),'Color','r',...
18           'Parent',ax2,'LineWidth',2.5,'LineStyle','-');
19 h13 = line(x,datenMatLab01(:,6),'Color','b',...
20           'Parent',ax2,'LineWidth',2.5,'LineStyle','--');
21 legend('R(x)-\pi(x)','li(x)-\pi(x)',0);
22 xlabel('x');
23 ylabel('R(x)-\pi(x); \cup li(x)-\pi(x)');
24 title('R(x)-\pi(x); \cup li(x)-\pi(x); \cup log(x)/x-\pi(x) \cup \text{mit } 10^{\{1\}} \cup \text{leq } x \cup \text{leq } 10^{\{2\}}');
```

```
25 grid on;
```

Listing C.1: TwoAxes01.m

Listing C.2: TwoAxes02.m

```

1 %*****
2 %Mohamed NAJI
3 %TwoAxes03.m
4 %*****
5 load datenMatLab03.mat;
6 x=1.0000e+3 :1.0000e+3: 1.0000e+4;
7 h11 = line(x,datenMatLab03(:,8),'Color',...
8     'k','LineWidth',2.5,'LineStyle',':') ;
9 legend('log(x)/x-\pi(x)',0);
10 ylabel('log(x)/x-\pi(x)');
11 ax1 = gca;
12 set(ax1,'YColor','k');
13 ax2 = axes('Position',get(ax1,'Position'),...
14     'YAxisLocation','right',...
15     'Color','none',...
16     'YColor','b');
17 h12 = line(x,datenMatLab03(:,7),'Color','r',...
18     'Parent',ax2,'LineWidth',2.5,'LineStyle','—');
19 h13 = line(x,datenMatLab03(:,6),'Color','b',...
20     'Parent',ax2,'LineWidth',2.5,'LineStyle','—');
21 legend('R(x)-\pi(x)','li(x)-\pi(x)',0);
22 xlabel('x');
23 ylabel('R(x)-\pi(x); \cup li(x)-\pi(x)');
24 title('R(x)-\pi(x); \cup li(x)-\pi(x); \cup log(x)/x-\pi(x) \cup mit \cup 10^{\cup 3} \cup \leq \cup x \cup \leq \cup 10^{\cup 4}');
25 grid on;

```

Listing C.3: TwoAxes03.m


```

1 %*****
2 %Mohamed NAJI
3 %TwoAxes04.m
4 %*****
5 load datenMatLab04.mat;
6 x=1.0000e+4 :1.0000e+4: 1.0000e+5;
7 h11 = line(x,datenMatLab04(:,8),'Color',...
8           'k','LineWidth',2.5,'LineStyle',':') ;
9 legend('log(x)/x-\pi(x)',0);
10 ylabel('log(x)/x-\pi(x)');
11 ax1 = gca;
12 set(ax1,'YColor','k');
13 ax2 = axes('Position',get(ax1,'Position'),...
14           'YAxisLocation','right',...
15           'Color','none',...
16           'YColor','b');
17 h12 = line(x,datenMatLab04(:,7),'Color','r',...
18           'Parent',ax2,'LineWidth',2.5,'LineStyle','—');
19 h13 = line(x,datenMatLab04(:,6),'Color','b',...
20           'Parent',ax2,'LineWidth',2.5,'LineStyle','—');
21 legend('R(x)-\pi(x)','li(x)-\pi(x)',0);
22 xlabel('x');
23 ylabel('R(x)-\pi(x); \cup li(x)-\pi(x)');
24 title('R(x)-\pi(x); \cup li(x)-\pi(x); \cup log(x)/x-\pi(x) \cup \text{mit } 10^{\{4\}} \cup \text{leq } x \cup \text{leq } 10^{\{5\}}');
25 grid on;

```

Listing C.4: TwoAxes04.m

```

1 %*****
2 %Mohamed NAJI
3 %TwoAxes05.m
4 %*****
5 load datenMatLab05.mat;
6 x=1.0000e+5 :1.0000e+5: 1.0000e+6;
7 h11 = line(x,datenMatLab05(:,8),'Color',...
8     'k','LineWidth',2.5,'LineStyle',':') ;
9 legend('log(x)/x-\pi(x)',0);
10 ylabel('log(x)/x-\pi(x)');
11 ax1 = gca;
12 set(ax1,'YColor','k');
13 ax2 = axes('Position',get(ax1,'Position'),...
14     'YAxisLocation','right',...
15     'Color','none',...
16     'YColor','b');
17 h12 = line(x,datenMatLab05(:,7),'Color','r',...
18     'Parent',ax2,'LineWidth',2.5,'LineStyle','—');
19 h13 = line(x,datenMatLab05(:,6),'Color','b',...
20     'Parent',ax2,'LineWidth',2.5,'LineStyle','—');
21 legend('R(x)-\pi(x)','li(x)-\pi(x)',0);
22 xlabel('x');
23 ylabel('R(x)-\pi(x); \cup li(x)-\pi(x)');
24 title('R(x)-\pi(x); \cup li(x)-\pi(x); \cup log(x)/x-\pi(x) \cup mit \cup 10^{\cup 5} \cup \leq \cup x \cup \leq \cup 10^{\cup 6}');
25 grid on;

```

Listing C.5: TwoAxes05.m

```

1 %*****
2 %Mohamed NAJI
3 %TwoAxes06.m
4 %*****
5 load datenMatLab06.mat;
6 x=1.0000e+6 :1.0000e+6: 1.0000e+7;
7 h11 = line(x,datenMatLab06(:,8),'Color',...
8           'k','LineWidth',2.5,'LineStyle',':') ;
9 legend('log(x)/x-\pi(x)',0);
10 ylabel('log(x)/x-\pi(x)');
11 ax1 = gca;
12 set(ax1,'YColor','k');
13 ax2 = axes('Position',get(ax1,'Position'),...
14           'YAxisLocation','right',...
15           'Color','none',...
16           'YColor','b');
17 h12 = line(x,datenMatLab06(:,7),'Color','r',...
18           'Parent',ax2,'LineWidth',2.5,'LineStyle','—');
19 h13 = line(x,datenMatLab06(:,6),'Color','b',...
20           'Parent',ax2,'LineWidth',2.5,'LineStyle','—');
21 legend('R(x)-\pi(x)','li(x)-\pi(x)',0);
22 xlabel('x');
23 ylabel('R(x)-\pi(x); \cup li(x)-\pi(x)');
24 title('R(x)-\pi(x); \cup li(x)-\pi(x); \cup log(x)/x-\pi(x) \cup mit \cup 10^{\{6\}} \cup \leq \cup x \cup \leq \cup 10^{\{7\}}');
25 grid on;

```

Listing C.6: TwoAxes06.m

```

1 %*****
2 %Mohamed NAJI
3 %TwoAxes07.m
4 %*****
5 load datenMatLab07.mat;
6 x=1.0000e+7 :1.0000e+7: 1.0000e+8;
7 h11 = line(x,datenMatLab07(:,8),'Color',...
8           'k','LineWidth',2.5,'LineStyle',':') ;
9 legend('log(x)/x-\pi(x)',0);
10 ylabel('log(x)/x-\pi(x)');
11 ax1 = gca;
12 set(ax1,'YColor','k');
13 ax2 = axes('Position',get(ax1,'Position'),...
14           'YAxisLocation','right',...
15           'Color','none',...
16           'YColor','b');
17 h12 = line(x,datenMatLab07(:,7),'Color','r',...
18           'Parent',ax2,'LineWidth',2.5,'LineStyle','—');
19 h13 = line(x,datenMatLab07(:,6),'Color','b',...
20           'Parent',ax2,'LineWidth',2.5,'LineStyle','—');
21 legend('R(x)-\pi(x)','li(x)-\pi(x)',0);
22 xlabel('x');
23 ylabel('R(x)-\pi(x); \cup li(x)-\pi(x)');
24 title('R(x)-\pi(x); \cup li(x)-\pi(x); \cup log(x)/x-\pi(x) \cup mit \cup 10^{\{7\}} \cup \leq \cup x \cup \leq \cup 10^{\{8\}}');
25 grid on;

```

Listing C.7: TwoAxes07.m

Listing C.8: TwoAxes08.m

Listing C.9: TwoAxes09.m

```

1 %*****
2 %Mohamed NAJI
3 %TwoAxes10.m
4 %*****
5 load datenMatLab10.mat;
6 x=1.0000e+10 :1.0000e+10: 1.0000e+11;
7 h11 = line(x,datenMatLab10(:,8),'Color',...
8 'k','LineWidth',2.5,'LineStyle',':') ;
9 legend('log(x)/x-\pi(x)',0);
10 ylabel('log(x)/x-\pi(x)');
11 ax1 = gca;
12 set(ax1,'YColor','k');
13 ax2 = axes('Position',get(ax1,'Position'),...
14 'YAxisLocation','right',...
15 'Color','none',...
16 'YColor','b');
17 h12 = line(x,datenMatLab10(:,7),'Color','r',...
18 'Parent',ax2,'LineWidth',2.5,'LineStyle','—');
19 h13 = line(x,datenMatLab10(:,6),'Color','b',...
20 'Parent',ax2,'LineWidth',2.5,'LineStyle','—');
21 legend('R(x)-\pi(x)','li(x)-\pi(x)',0);
22 xlabel('x');
23 ylabel('R(x)-\pi(x); \cup li(x)-\pi(x)');
24 title('R(x)-\pi(x); \cup li(x)-\pi(x); \cup log(x)/x-\pi(x) \cup \text{mit } 10^{\{10\}} \cup \text{leq } x \cup \text{leq } 10^{\{11\}}');
25 grid on;

```

Listing C.10: TwoAxes10.m

```

1 %*****
2 %Mohamed NAJI
3 %TwoAxes11.m
4 %*****
5 load datenMatLab11.mat;
6 x=1.0000e+11 :1.0000e+11: 1.0000e+12;
7 h11 = line(x,datenMatLab11(:,8),'Color',...
8           'k','LineWidth',2.5,'LineStyle',':') ;
9 legend('log(x)/x-\pi(x)',0);
10 ylabel('log(x)/x-\pi(x)');
11 ax1 = gca;
12 set(ax1,'YColor','k');
13 ax2 = axes('Position',get(ax1,'Position'),...
14           'YAxisLocation','right',...
15           'Color','none',...
16           'YColor','b');
17 h12 = line(x,datenMatLab11(:,7),'Color','r',...
18           'Parent',ax2,'LineWidth',2.5,'LineStyle','—');
19 h13 = line(x,datenMatLab11(:,6),'Color','b',...
20           'Parent',ax2,'LineWidth',2.5,'LineStyle','—');
21 legend('R(x)-\pi(x)', 'li(x)-\pi(x)',0);
22 xlabel('x');
23 ylabel('R(x)-\pi(x); \cup li(x)-\pi(x)');
24 title('R(x)-\pi(x); \cup li(x)-\pi(x); \cup log(x)/x-\pi(x) \cup mit \cup 10^{\{11\}} \cup \leq \cup x \cup \leq \cup 10^{\{12\}}');
25 grid on;

```

Listing C.11: TwoAxes11.m

Listing C.12: TwoAxes12.m

```

1 %*****
2 %Mohamed NAJI
3 %TwoAxes13.m
4 %*****
5 load datenMatLab13.mat;
6 x=1.0000e+13 :1.0000e+13: 1.0000e+14;
7 h11 = line(x,datenMatLab13(:,8),'Color',...
8           'k','LineWidth',2.5,'LineStyle',':') ;
9 legend('log(x)/x-\pi(x)',0);
10 ylabel('log(x)/x-\pi(x)');
11 ax1 = gca;
12 set(ax1,'YColor','k');
13 ax2 = axes('Position',get(ax1,'Position'),...
14           'YAxisLocation','right',...
15           'Color','none',...
16           'YColor','b');
17 h12 = line(x,datenMatLab13(:,7),'Color','r',...
18           'Parent',ax2,'LineWidth',2.5,'LineStyle','—');
19 h13 = line(x,datenMatLab13(:,6),'Color','b',...
20           'Parent',ax2,'LineWidth',2.5,'LineStyle','—');
21 legend('R(x)-\pi(x)','li(x)-\pi(x)',0);
22 xlabel('x');
23 ylabel('R(x)-\pi(x); \cup li(x)-\pi(x)');
24 title('R(x)-\pi(x); \cup li(x)-\pi(x); \cup log(x)/x-\pi(x) \cup mit \cup 10^{\{13\}} \cup \leq \cup x \cup \leq \cup 10^{\{13\}}');
25 grid on;

```

Listing C.13: TwoAxes13.m

Listing C.14: TwoAxes14.m

Listing C.15: TwoAxes15.m

Listing C.16: TwoAxes16.m

```

1 %*****
2 %Mohamed NAJI
3 %TwoAxes17.m
4 %*****
5 load datenMatLab17.mat;
6 x=1.0000e+17 :1.0000e+17: 1.0000e+18;
7 h11 = line(x,datenMatLab17(:,8),'Color',...
8           'k','LineWidth',2.5,'LineStyle',':') ;
9 legend('log(x)/x-\pi(x)',0);
10 ylabel('log(x)/x-\pi(x)');
11 ax1 = gca;
12 set(ax1,'YColor','k');
13 ax2 = axes('Position',get(ax1,'Position'),...
14           'YAxisLocation','right',...
15           'Color','none',...
16           'YColor','b');
17 h12 = line(x,datenMatLab17(:,7),'Color','r',...
18           'Parent',ax2,'LineWidth',2.5,'LineStyle','—');
19 h13 = line(x,datenMatLab17(:,6),'Color','b',...
20           'Parent',ax2,'LineWidth',2.5,'LineStyle','—');
21 legend('R(x)-\pi(x)','li(x)-\pi(x)',0);
22 xlabel('x');
23 ylabel('R(x)-\pi(x); \cup li(x)-\pi(x)');
24 title('R(x)-\pi(x); \cup li(x)-\pi(x); \cup log(x)/x-\pi(x) \cup mit \cup 10^{\{17\}} \cup \leq \cup x \cup \leq \cup 10^{\{18\}}');
25 grid on;

```

Listing C.17: TwoAxes17.m

```

1 %*****
2 %Mohamed NAJI
3 %TwoAxes00.m
4 %*****
5 load datenMatLab00.mat;
6 h11 = line(datenMatLab00(:,1),datenMatLab00(:,8),'Color',...
7           'k','LineWidth',2.5,'LineStyle',':');
8 legend('log(x)/x-\pi(x)',0);
9 ylabel('log(x)/x-\pi(x)');
10 ax1 = gca;
11 set(ax1,'YColor','k');
12 ax2 = axes('Position',get(ax1,'Position'),...
13           'YAxisLocation','right',...
14           'Color','none',...
15           'YColor','b');
16 h12 = line(datenMatLab00(:,1),datenMatLab00(:,7),'Color','r'
17           ,...
18           'Parent',ax2,'LineWidth',2.5,'LineStyle','-');
19 h13 = line(datenMatLab00(:,1),datenMatLab00(:,6),'Color','b'
20           ,...
21           'Parent',ax2,'LineWidth',2.5,'LineStyle','—');
22 legend('R(x)-\pi(x)','li(x)-\pi(x)',0);
23 xlabel('x');
24 ylabel('R(x)-\pi(x); li(x)-\pi(x)');
25 title('R(x)-\pi(x); li(x)-\pi(x); log(x)/x-\pi(x) mit 10^1 leq x leq 10^18');
26 grid on;

```

Listing C.18: TwoAxes00.m

```

1 %*****
2 %Mohamed NAJI
3 %Twodiagramm01.m
4 %*****
5 load datenMatLab01.mat;
6 x=1.0000e+1 :1.0000e+1: 1.0000e+2;
7 plot(x,datenMatLab01(:,6), 'r-', ...
8      x,datenMatLab01(:,7), 'b—', 'LineWidth',2.5),
9 legend('R(x)-\pi(x)', 'li(x)-\pi(x)',0);
10 xlabel('x');
11 ylabel('R(x)-\pi(x); \cup li(x)-\pi(x)');
12 title('R(x)-\pi(x); \cup li(x)-\pi(x) \cup mit \cup 10^{\{1\}} \cup \leq x \cup \leq \cup 10^{\{2\}}');
13 grid on;

```

Listing C.19: Twodiagramm01.m


```

1 %*****
2 %Mohamed NAJI
3 %Twodiagramm02.m
4 %*****
5 load datenMatLab02.mat;
6 x=1.0000e+2 :1.0000e+2: 1.0000e+3;
7 plot(x,datenMatLab02(:,6), 'r-', ...
8      x,datenMatLab02(:,7), 'b—', 'LineWidth',2.5),
9 legend('R(x)-\pi(x)', 'li(x)-\pi(x)',0);
10 xlabel('x');
11 ylabel('R(x)-\pi(x); \cup li(x)-\pi(x)');
12 title('R(x)-\pi(x); \cup li(x)-\pi(x) \cup mit \cup 10^{\{2\}} \cup \leq x \cup \leq \cup 10^{\{3\}}');
13 grid on;

```

Listing C.20: Twodiagramm02.m

```

1 %*****
2 %Mohamed NAJI
3 %Twodiagramm03.m
4 %*****
5 load datenMatLab03.mat;
6 x=1.0000e+3 :1.0000e+3: 1.0000e+4;
7 plot(x,datenMatLab03(:,6), 'r-', ...
8      x,datenMatLab03(:,7), 'b—', 'LineWidth',2.5),
9 legend('R(x)-\pi(x)', 'li(x)-\pi(x)',0);
10 xlabel('x');
11 ylabel('R(x)-\pi(x); \cup li(x)-\pi(x)');
12 title('R(x)-\pi(x); \cup li(x)-\pi(x) \cup mit \cup 10^{\{3\}} \cup \leq x \cup \leq \cup 10^{\{4\}}');
13 grid on;

```

Listing C.21: Twodiagramm03.m

```

1 %*****
2 %Mohamed NAJI
3 %Twodiagramm04.m
4 %*****
5 load datenMatLab04.mat;
6 x=1.0000e+4 :1.0000e+4: 1.0000e+5;
7 plot(x,datenMatLab04(:,6), 'r-',...
8      x,datenMatLab04(:,7), 'b—', 'LineWidth',2.5),
9 legend('R(x)-\pi(x)', 'li(x)-\pi(x)',0);
10 xlabel('x');
11 ylabel('R(x)-\pi(x); \cup li(x)-\pi(x)');
12 title('R(x)-\pi(x); \cup li(x)-\pi(x) \cup mit \cup 10^{\{4\}} \cup \leq x \cup \leq \cup 10^{\{5\}}');
13 grid on;

```

Listing C.22: Twodiagramm04.m

```

1 %*****
2 %Mohamed NAJI
3 %Twodiagramm05.m
4 %*****
5 load datenMatLab05.mat;
6 x=1.0000e+5 :1.0000e+5: 1.0000e+6;
7 plot(x,datenMatLab05(:,6), 'r-',...
8      x,datenMatLab05(:,7), 'b—', 'LineWidth',2.5),
9 legend('R(x)-\pi(x)', 'li(x)-\pi(x)',0);
10 xlabel('x');
11 ylabel('R(x)-\pi(x); \cup li(x)-\pi(x)');
12 title('R(x)-\pi(x); \cup li(x)-\pi(x) \cup mit \cup 10^{\cup 5} \cup \leq \cup x \cup \leq \cup 10^{\cup 6}');
13 grid on;

```

Listing C.23: Twodiagramm05.m

```

1 %*****
2 %Mohamed NAJI
3 %Twodiagramm06.m
4 %*****
5 load datenMatLab06.mat;
6 x=1.0000e+6 :1.0000e+6: 1.0000e+7;
7 plot(x,datenMatLab06(:,6), 'r-',...
8      x,datenMatLab06(:,7), 'b—', 'LineWidth',2.5),
9 legend('R(x)-\pi(x)', 'li(x)-\pi(x)',0);
10 xlabel('x');
11 ylabel('R(x)-\pi(x); \cup li(x)-\pi(x)');
12 title('R(x)-\pi(x); \cup li(x)-\pi(x) \subset_{mit} 10^{\{6\}} \cup \leq x \leq 10^{\{7\}}');
13 grid on;

```

Listing C.24: Twodiagramm06.m

```

1 %*****
2 %Mohamed NAJI
3 %Twodiagramm07.m
4 %*****
5 load datenMatLab07.mat;
6 x=1.0000e+7 :1.0000e+7: 1.0000e+8;
7 plot(x,datenMatLab07(:,6), 'r-',...
8      x,datenMatLab07(:,7), 'b—', 'LineWidth',2.5),
9 legend('R(x)-\pi(x)', 'li(x)-\pi(x)',0);
10 xlabel('x');
11 ylabel('R(x)-\pi(x); \cup li(x)-\pi(x)');
12 title('R(x)-\pi(x); \cup li(x)-\pi(x) \cup mit \cup 10^{\{7\}} \cup \leq x \cup \leq \cup 10^{\{8\}}');
13 grid on;

```

Listing C.25: Twodiagramm07.m

```

1 %*****
2 %Mohamed NAJI
3 %Twodiagramm08.m
4 %*****
5 load datenMatLab08.mat;
6 x=1.0000e+8 :1.0000e+8: 1.0000e+9;
7 plot(x,datenMatLab08(:,6), 'r-',...
8      x,datenMatLab08(:,7), 'b—', 'LineWidth',2.5),
9 legend('R(x)-\pi(x)', 'li(x)-\pi(x)',0);
10 xlabel('x');
11 ylabel('R(x)-\pi(x); \cup li(x)-\pi(x)');
12 title('R(x)-\pi(x); \cup li(x)-\pi(x) \cup mit \cup 10^{\{8\}} \cup \leq x \cup \leq \cup 10^{\{9\}}');
13 grid on;

```

Listing C.26: Twodiagramm08.m

```

1 %*****
2 %Mohamed NAJI
3 %Twodiagramm09.m
4 %*****
5 load datenMatLab09.mat;
6 x=1.0000e+9 :1.0000e+9: 1.0000e+10;
7 plot(x,datenMatLab09(:,6), 'r-', ...
8      x,datenMatLab09(:,7), 'b—', 'LineWidth',2.5),
9 legend('R(x)-\pi(x)', 'li(x)-\pi(x)',0);
10 xlabel('x');
11 ylabel('R(x)-\pi(x); \cup li(x)-\pi(x)');
12 title('R(x)-\pi(x); \cup li(x)-\pi(x) \cup mit \cup 10^{\{9\}} \cup \leq \cup x \cup \leq \cup 10^{\{10\}}');
13 grid on;

```

Listing C.27: Twodiagramm09.m


```

1 %*****
2 %Mohamed NAJI
3 %Twodiagramm10.m
4 %*****
5 load datenMatLab10.mat;
6 x=1.0000e+10 :1.0000e+10: 1.0000e+11;
7 plot(x,datenMatLab10(:,6), 'r-', ...
8      x,datenMatLab10(:,7), 'b—', 'LineWidth',2.5),
9 legend('R(x)-\pi(x)', 'li(x)-\pi(x)',0);
10 xlabel('x');
11 ylabel('R(x)-\pi(x); \cup li(x)-\pi(x)');
12 title('R(x)-\pi(x); \cup li(x)-\pi(x) \cup mit \cup 10^{\{10\}} \cup \leq \cup x \cup \leq \cup 10^{\{11\}}');
13 grid on;

```

Listing C.28: Twodiagramm10.m

```

1 %*****
2 %Mohamed NAJI
3 %Twodiagramm11.m
4 %*****
5 load datenMatLab11.mat;
6 x=1.0000e+11 :1.0000e+11: 1.0000e+12;
7 plot(x,datenMatLab11(:,6), 'r-',...
8      x,datenMatLab11(:,7), 'b—', 'LineWidth',2.5),
9 legend('R(x)-\pi(x)', 'li(x)-\pi(x)',0);
10 xlabel('x');
11 ylabel('R(x)-\pi(x); \cup li(x)-\pi(x)');
12 title('R(x)-\pi(x); \cup li(x)-\pi(x) \cup mit \cup 10^{\{11\}} \cup \leq \cup x \cup \leq \cup 10^{\{12\}}');
13 grid on;

```

Listing C.29: Twodiagramm11.m

```

1 %*****
2 %Mohamed NAJI
3 %Twodiagramm12.m
4 %*****
5 load datenMatLab12.mat;
6 x=1.0000e+12 :1.0000e+12: 1.0000e+13;
7 plot(x,datenMatLab12(:,6), 'r-',...
8      x,datenMatLab12(:,7), 'b—', 'LineWidth',2.5),
9 legend('R(x)-\pi(x)', 'li(x)-\pi(x)',0);
10 xlabel('x');
11 ylabel('R(x)-\pi(x); \cup li(x)-\pi(x)');
12 title('R(x)-\pi(x); \cup li(x)-\pi(x) \cup mit \cup 10^{\{12\}} \cup \leq \cup x \cup \leq \cup 10^{\{13\}}');
13 grid on;

```

Listing C.30: Twodiagramm12.m

```

1 %*****
2 %Mohamed NAJI
3 %Twodiagramm13.m
4 %*****
5 load datenMatLab13.mat;
6 x=1.0000e+13 :1.0000e+13: 1.0000e+14;
7 plot(x,datenMatLab13(:,6), 'r-', ...
8      x,datenMatLab13(:,7), 'b—', 'LineWidth',2.5),
9 legend('R(x)-\pi(x)', 'li(x)-\pi(x)',0);
10 xlabel('x');
11 ylabel('R(x)-\pi(x); \cup li(x)-\pi(x)');
12 title('R(x)-\pi(x); \cup li(x)-\pi(x) \cup mit \cup 10^{\{13\}} \cup \leq \cup x \cup \leq \cup 10^{\{14\}}');
13 grid on;

```

Listing C.31: Twodiagramm13.m

```

1 %*****
2 %Mohamed NAJI
3 %Twodiagramm14.m
4 %*****
5 load datenMatLab14.mat;
6 x=1.0000e+14:1.0000e+14: 1.0000e+15;
7 plot(x,datenMatLab14(:,6), 'r-', ...
8      x,datenMatLab14(:,7), 'b—', 'LineWidth',2.5),
9 legend('R(x)-\pi(x)', 'li(x)-\pi(x)',0);
10 xlabel('x');
11 ylabel('R(x)-\pi(x); \cup li(x)-\pi(x)');
12 title('R(x)-\pi(x); \cup li(x)-\pi(x) \cup mit \cup 10^{\{14\}} \cup \leq \cup x \cup \leq \cup 10^{\{15\}}');
13 grid on;

```

Listing C.32: Twodiagramm14.m

```

1 %*****
2 %Mohamed NAJI
3 %Twodiagramm15.m
4 %*****
5 load datenMatLab15.mat;
6 x=1.0000e+15:1.0000e+15: 1.0000e+16;
7 plot(x,datenMatLab15(:,6), 'r-', ...
8      x,datenMatLab15(:,7), 'b—', 'LineWidth',2.5),
9 legend('R(x)-\pi(x)', 'li(x)-\pi(x)',0);
10 xlabel('x');
11 ylabel('R(x)-\pi(x); \cup li(x)-\pi(x)');
12 title('R(x)-\pi(x); \cup li(x)-\pi(x) \cup mit \cup 10^{\{15\}} \cup \leq \cup x \cup \leq \cup 10^{\{16\}}');
13 grid on;

```

Listing C.33: Twodiagramm15.m

```

1 %*****
2 %Mohamed NAJI
3 %Twodiagramm16.m
4 %*****
5 load datenMatLab16.mat;
6 x=1.0000e+16:1.0000e+16: 1.0000e+17;
7 plot(x,datenMatLab16(:,6), 'r-',...
8      x,datenMatLab16(:,7), 'b—', 'LineWidth',2.5),
9 legend('R(x)-\pi(x)', 'li(x)-\pi(x)',0);
10 xlabel('x');
11 ylabel('R(x)-\pi(x); \cup li(x)-\pi(x)');
12 title('R(x)-\pi(x); \cup li(x)-\pi(x) \cup mit \cup 10^{\{16\}} \cup \leq \cup x \cup \leq \cup 10^{\{17\}}');
13 grid on;

```

Listing C.34: Twodiagramm16.m

```

1 %*****
2 %Mohamed NAJI
3 %Twodiagramm17.m
4 %*****
5 load datenMatLab17.mat;
6 x=1.0000e+17:1.0000e+17: 1.0000e+18;
7 plot(x,datenMatLab17(:,6), 'r-', ...
8      x,datenMatLab17(:,7), 'b—', 'LineWidth',2.5),
9 legend('R(x)-\pi(x)', 'li(x)-\pi(x)',0);
10 xlabel('x');
11 ylabel('R(x)-\pi(x); \cup li(x)-\pi(x)');
12 title('R(x)-\pi(x); \cup li(x)-\pi(x) \cup mit \cup 10^{\{17\}} \cup \leq \cup x \cup \leq \cup 10^{\{18\}}');
13 grid on;

```

Listing C.35: Twodiagramm17.m


```

1 %*****
2 %Mohamed NAJI
3 %Twodiagramm00.m
4 %*****
5 load datenMatLab00.mat;
6 plot(datenMatLab00(:,1),datenMatLab00(:,6),...
7      'r-',datenMatLab00(:,1),...
8      datenMatLab00(:,7),'b—', 'LineWidth',2.5),
9 legend('R(x)-\pi(x)', 'li(x)-\pi(x)',0);
10 xlabel('x');
11 ylabel('R(x)-\pi(x); \cup li(x)-\pi(x)');
12 title('R(x)-\pi(x); \cup li(x)-\pi(x) \subset \mathbb{N} \leq x \leq 10^{18}');
13 grid on;

```

Listing C.36: Twodiagramm00.m

Listing C.37: Threediagramm01.m

Listing C.38: Threediagramm02.m

Listing C.39: Threedigramm03.m

```

1 %*****
2 %Mohamed NAJI
3 %Threedigramm04.m
4 %*****
5 load datenMatLab04.mat;
6 x=1.0000e+4 :1.0000e+4: 1.0000e+5;
7 plot(x,datenMatLab04(:,6), 'b-o', ...
8      x,datenMatLab04(:,7), 'r—', ...
9      x,datenMatLab04(:,8), 'k-', 'LineWidth', 2.5),
10 legend('R(x)-\pi(x)', 'li(x)-\pi(x)', 'log(x)/x-\pi(x)', 0);
11 xlabel('x');
12 ylabel('R(x)-\pi(x); \cup li(x)-\pi(x); \cup log(x)/x-\pi(x)');
13 title('R(x)-\pi(x); \cup li(x)-\pi(x); \cup log(x)/x-\pi(x) \cup_{mit} \cup 10^{\{4\}} \cup \leq \cup x \cup \leq \cup 10^{\{5\}}');
14 grid on;

```

Listing C.40: Threedigramm04.m

Listing C.41: Threediagramm05.m

```

1 %*****
2 %Mohamed NAJI
3 %Threedigramm06.m
4 %*****
5 load datenMatLab06.mat;
6 x=1.0000e+6 :1.0000e+6: 1.0000e+7;
7 plot(x,datenMatLab06(:,6), 'b-o',...
8      x,datenMatLab06(:,7), 'r—',...
9      x,datenMatLab06(:,8), 'k-', 'LineWidth',2.5),
10 legend('R(x)-\pi(x)', 'li(x)-\pi(x)', 'log(x)/x-\pi(x)',0);
11 xlabel('x');
12 ylabel('R(x)-\pi(x); \cup li(x)-\pi(x); \cup log(x)/x-\pi(x)');
13 title('R(x)-\pi(x); \cup li(x)-\pi(x); \cup log(x)/x-\pi(x) \cup_{mit} \cup 10^{\{6\}} \cup \leq \cup x \cup \leq \cup 10^{\{7\}}');
14 grid on;

```

Listing C.42: Threedigramm06.m

Listing C.43: Threediagramm07.m

Listing C.44: Threedigramm08.m

Listing C.45: Threedigramm09.m

```

1 %*****
2 %Mohamed NAJI
3 %Threedigramm10.m
4 %*****
5 load datenMatLab10.mat;
6 x=1.0000e+10 :1.0000e+10: 1.0000e+11;
7 plot(x,datenMatLab10(:,6), 'b-o', ...
8      x,datenMatLab10(:,7), 'r—', ...
9      x,datenMatLab10(:,8), 'k-', 'LineWidth', 2.5),
10 legend('R(x)-\pi(x)', 'li(x)-\pi(x)', 'log(x)/x-\pi(x)', 0);
11 xlabel('x');
12 ylabel('R(x)-\pi(x); \cup li(x)-\pi(x); \cup log(x)/x-\pi(x)');
13 title('R(x)-\pi(x); \cup li(x)-\pi(x); \cup log(x)/x-\pi(x) \cup_{10}^{10} \leq x \cup_{10}^{11}');
14 grid on;

```

Listing C.46: Threedigramm10.m

Listing C.47: Threediagramm11.m

Listing C.48: Threediagramm12.m

```

1 %*****
2 %Mohamed NAJI
3 %Threedigramm13.m
4 %*****
5 load datenMatLab13.mat;
6 x=1.0000e+13 :1.0000e+13: 1.0000e+14;
7 plot(x,datenMatLab13(:,6), 'b-o', ...
8      x,datenMatLab13(:,7), 'r—', ...
9      x,datenMatLab13(:,8), 'k-', 'LineWidth', 2.5),
10 legend('R(x)-\pi(x)', 'li(x)-\pi(x)', 'log(x)/x-\pi(x)', 0);
11 xlabel('x');
12 ylabel('R(x)-\pi(x); \cup li(x)-\pi(x); \cup log(x)/x-\pi(x)');
13 title('R(x)-\pi(x); \cup li(x)-\pi(x); \cup log(x)/x-\pi(x) \cup_{mit} 10^{\{13\}} \leq x \cup \leq 10^{\{14\}}');
14 grid on;

```

Listing C.49: Threedigramm13.m

Listing C.50: Threediagramm14.m

```

1 %*****
2 %Mohamed NAJI
3 %Threedigramm15.m
4 %*****
5 load datenMatLab15.mat;
6 x=1.0000e+15 :1.0000e+15: 1.0000e+16;
7 plot(x,datenMatLab15(:,6), 'b-o', ...
8      x,datenMatLab15(:,7), 'r—', ...
9      x,datenMatLab15(:,8), 'k-', 'LineWidth', 2.5),
10 legend('R(x)-\pi(x)', 'li(x)-\pi(x)', 'log(x)/x-\pi(x)', 0);
11 xlabel('x');
12 ylabel('R(x)-\pi(x); \cup li(x)-\pi(x); \cup log(x)/x-\pi(x)');
13 title('R(x)-\pi(x); \cup li(x)-\pi(x); \cup log(x)/x-\pi(x) \cup_{mit} 10^{15} \leq x \cup
        \leq 10^{16}');
14 grid on;

```

Listing C.51: Threedigramm15.m

Listing C.52: Threedigramm16.m

Listing C.53: Threediagramm17.m

```

1 %*****
2 %Mohamed NAJI
3 %Threedigramm00.m
4 %*****
5 load datenMatLab00.mat;
6 plot(datenMatLab00(:,1),datenMatLab00(:,6),...
7      'b-o',datenMatLab00(:,1),datenMatLab00(:,7),...
8      'r—',datenMatLab00(:,1),...
9      datenMatLab00(:,8),'k-','LineWidth',2.5),
10 legend('R(x)-\pi(x)','li(x)-\pi(x)', 'log(x)/x-\pi(x)',0);
11 xlabel('x');
12 ylabel('R(x)-\pi(x); \cup li(x)-\pi(x); \cup log(x)/x-\pi(x)');
13 title('R(x)-\pi(x); \cup li(x)-\pi(x); \cup log(x)/x-\pi(x) \cup 10^{\{1\}} \leq x \cup \leq 10^{\{18\}}');
14 grid on;

```

Listing C.54: Threedigramm00.m

Anhang D

Diagramme: $R(x) - \pi(x)$;

$li(x) - \pi(x)$ **und** $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$

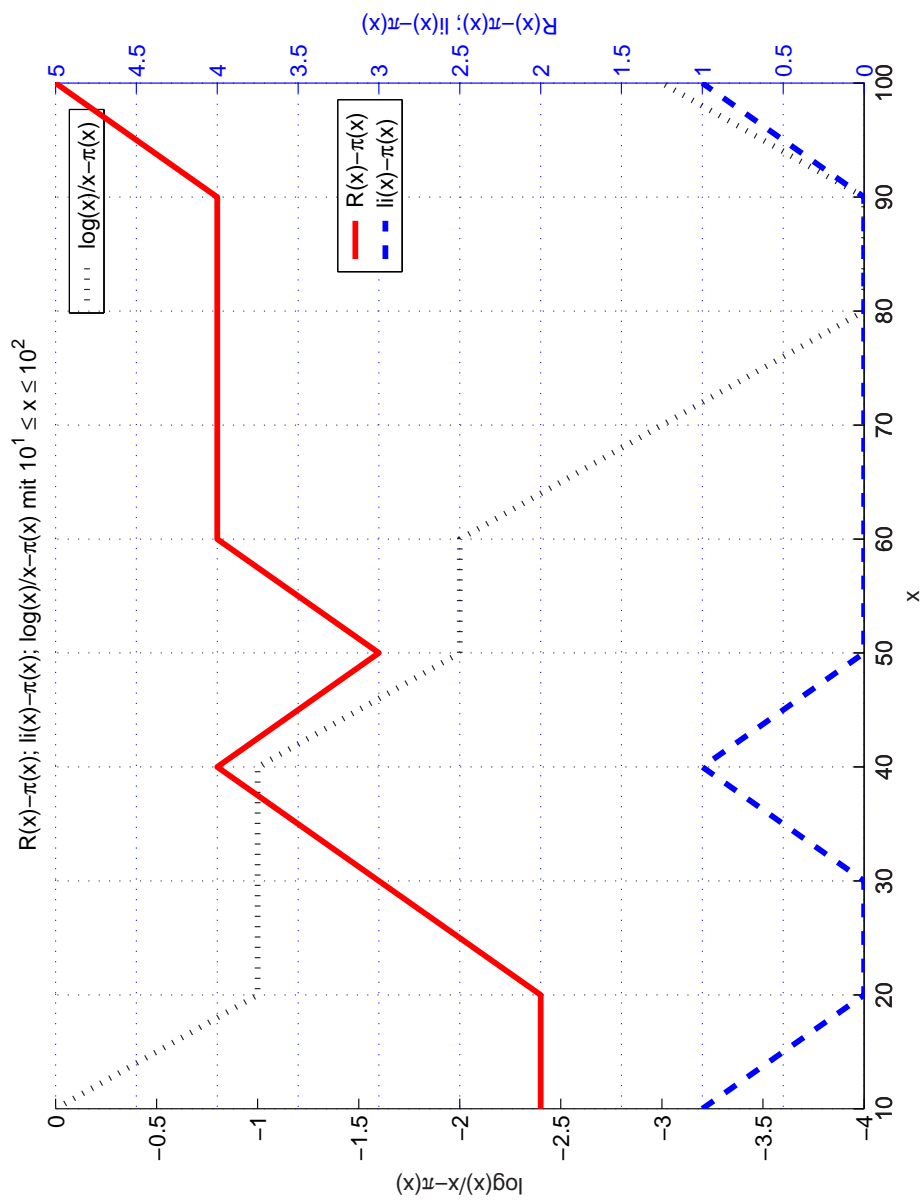


Abbildung D.1: Graphen von $R(x) - \pi(x)$; $li(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ für $10^1 \leq x \leq 10^2$

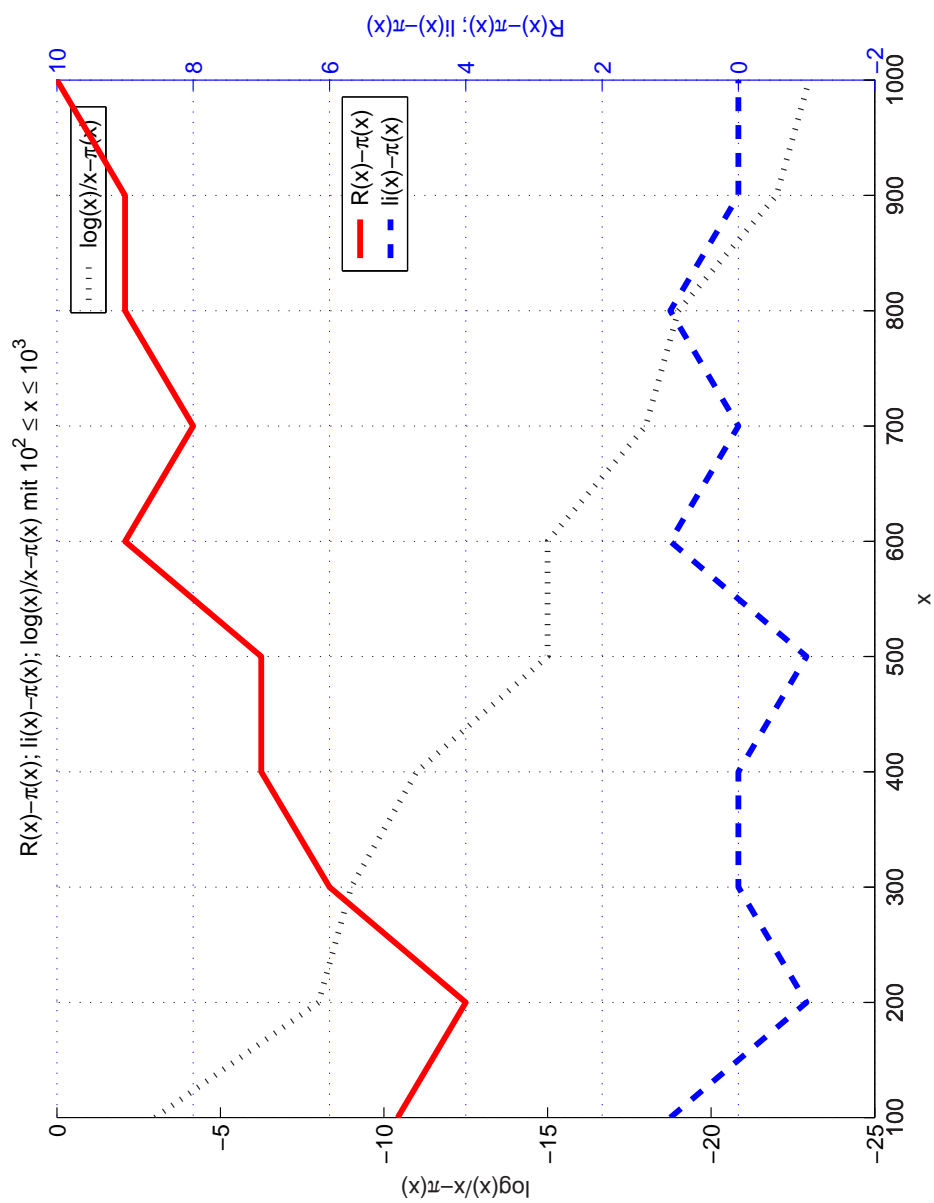


Abbildung D.2: Graphen von $R(x) - \pi(x)$; $li(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ für $10^2 \leq x \leq 10^3$

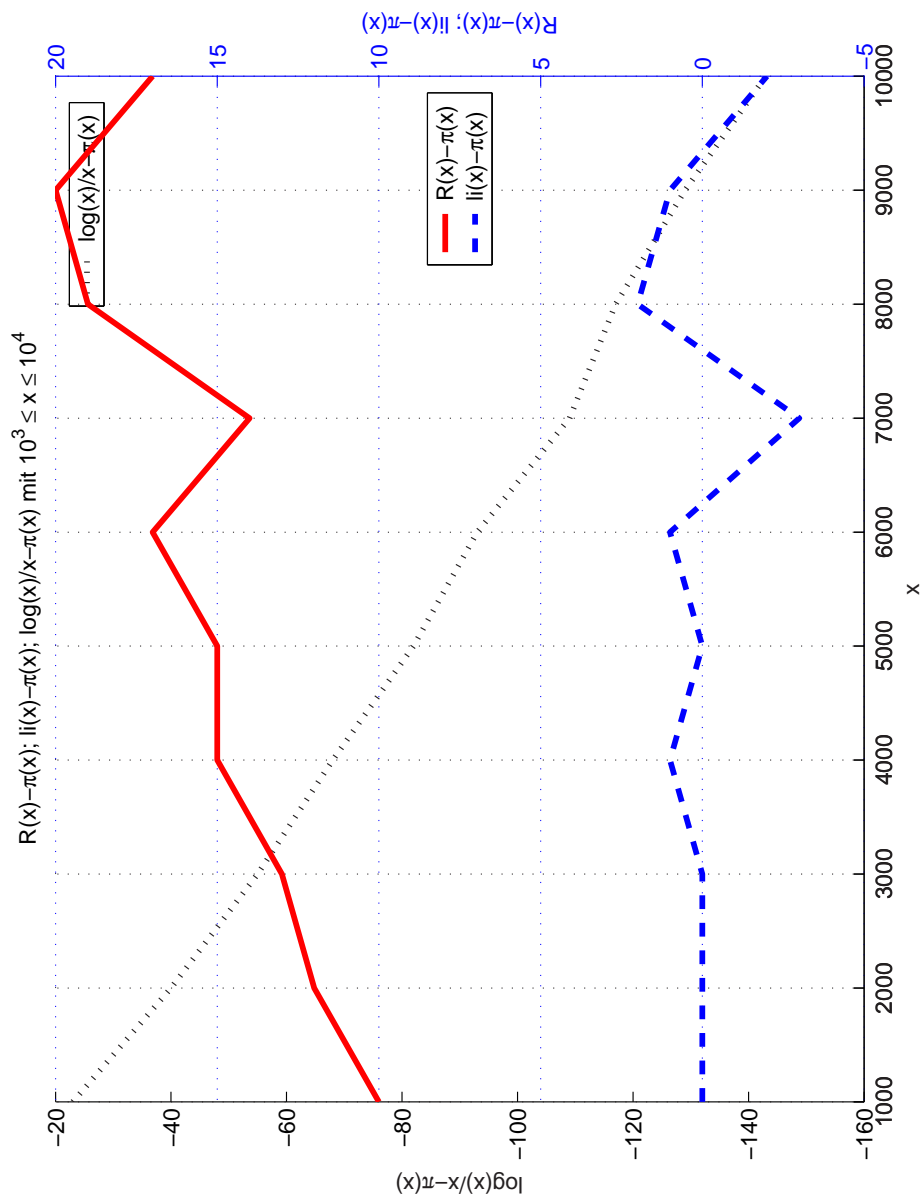


Abbildung D.3: Graphen von $R(x) - \pi(x)$; $\text{li}(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ für $10^3 \leq x \leq 10^4$

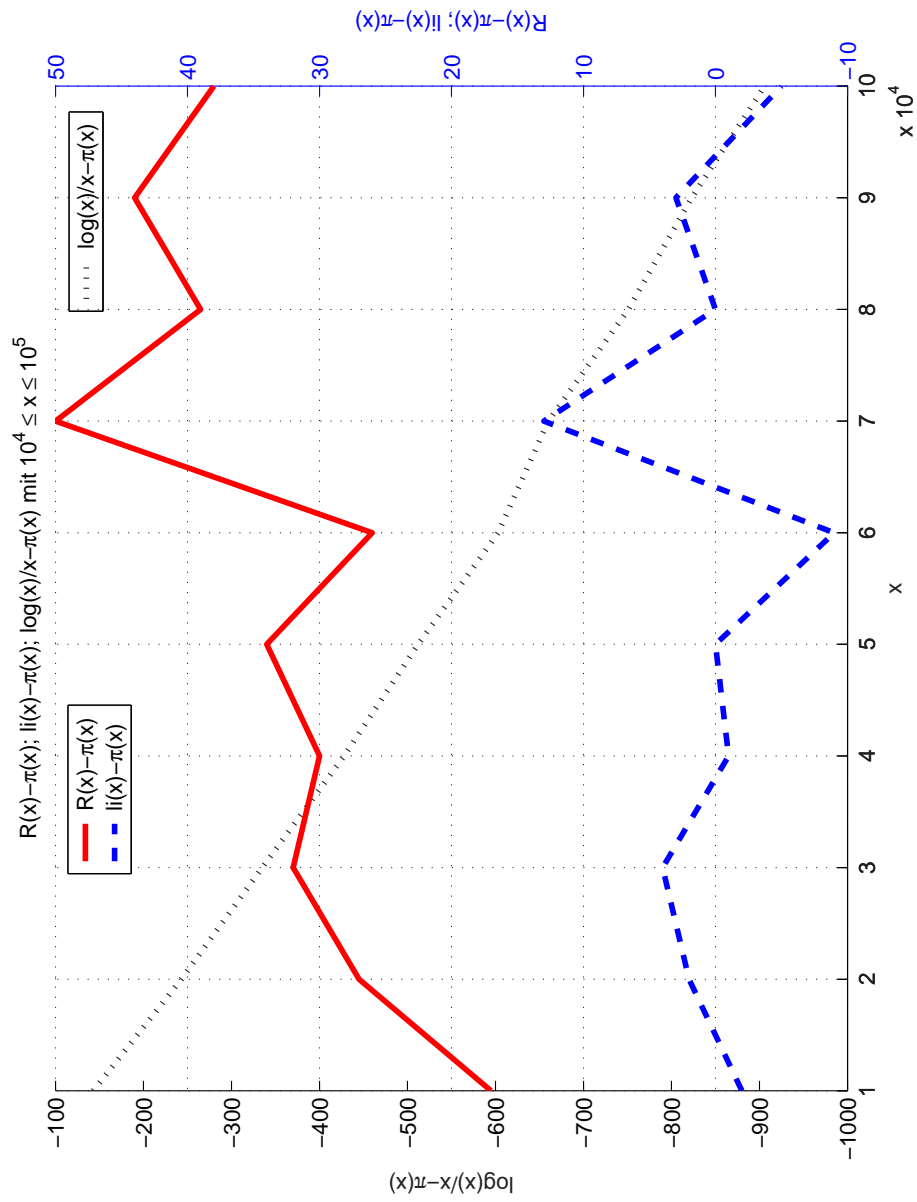


Abbildung D.4: Graphen von $R(x) - \pi(x)$; $li(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ für $10^4 \leq x \leq 10^5$

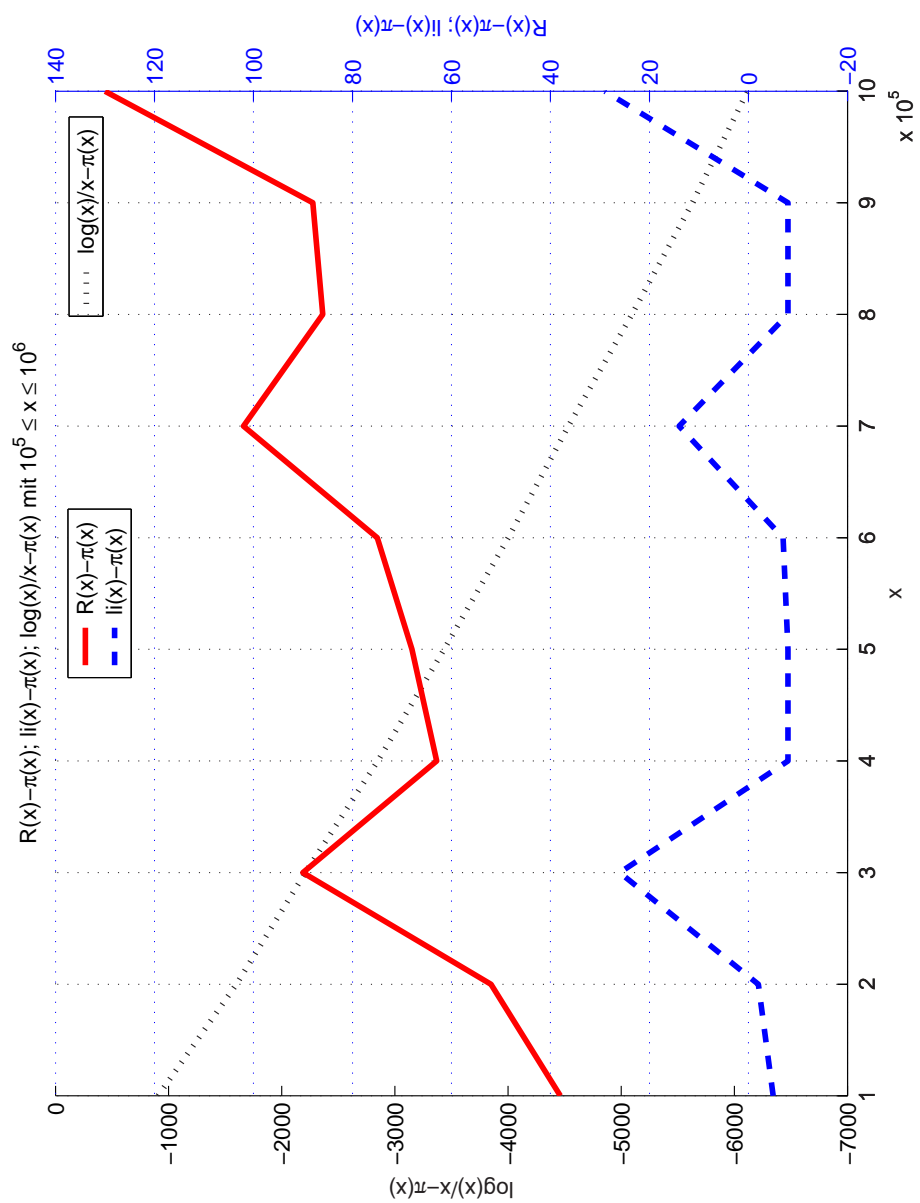


Abbildung D.5: Graphen von $R(x) - \pi(x)$; $li(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ für $10^5 \leq x \leq 10^6$

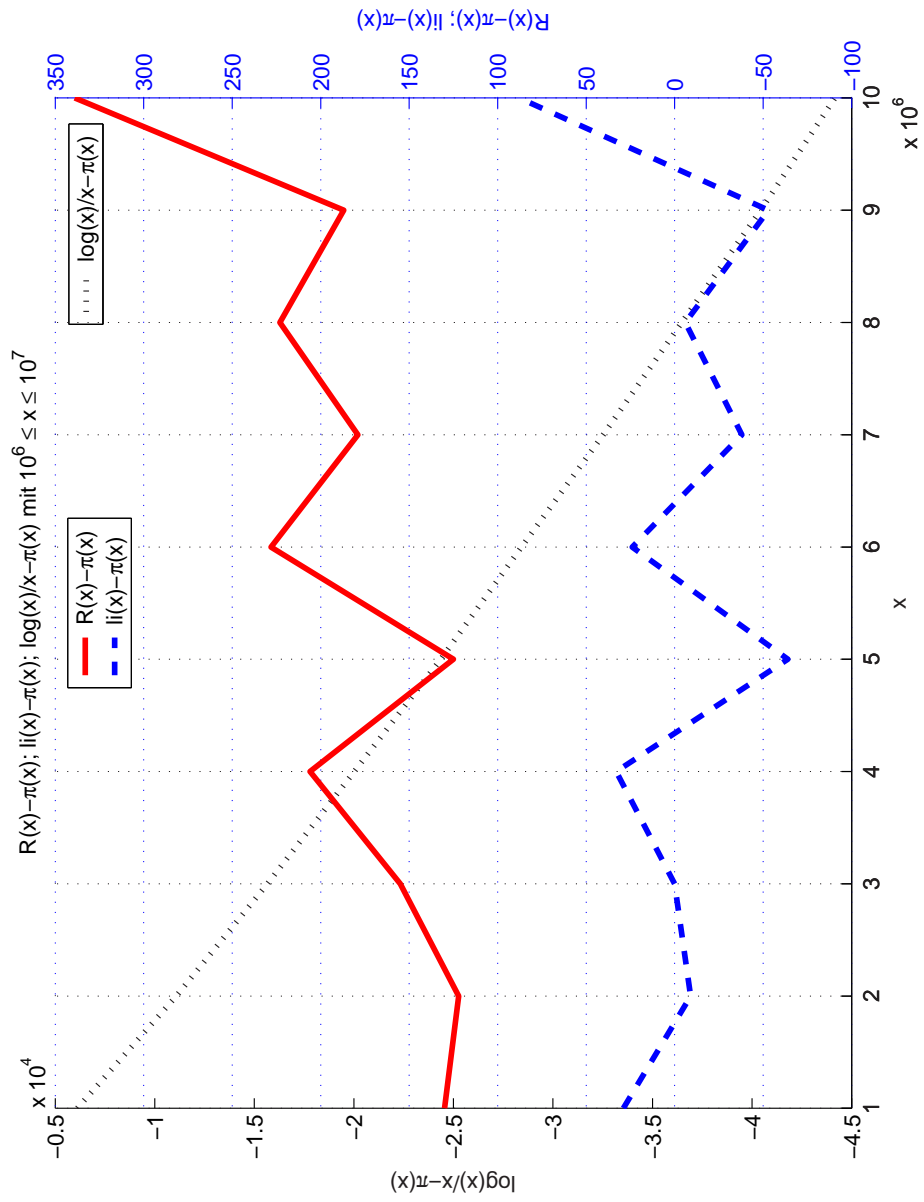


Abbildung D.6: Graphen von $R(x) - \pi(x)$; $li(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ für $10^6 \leq x \leq 10^7$

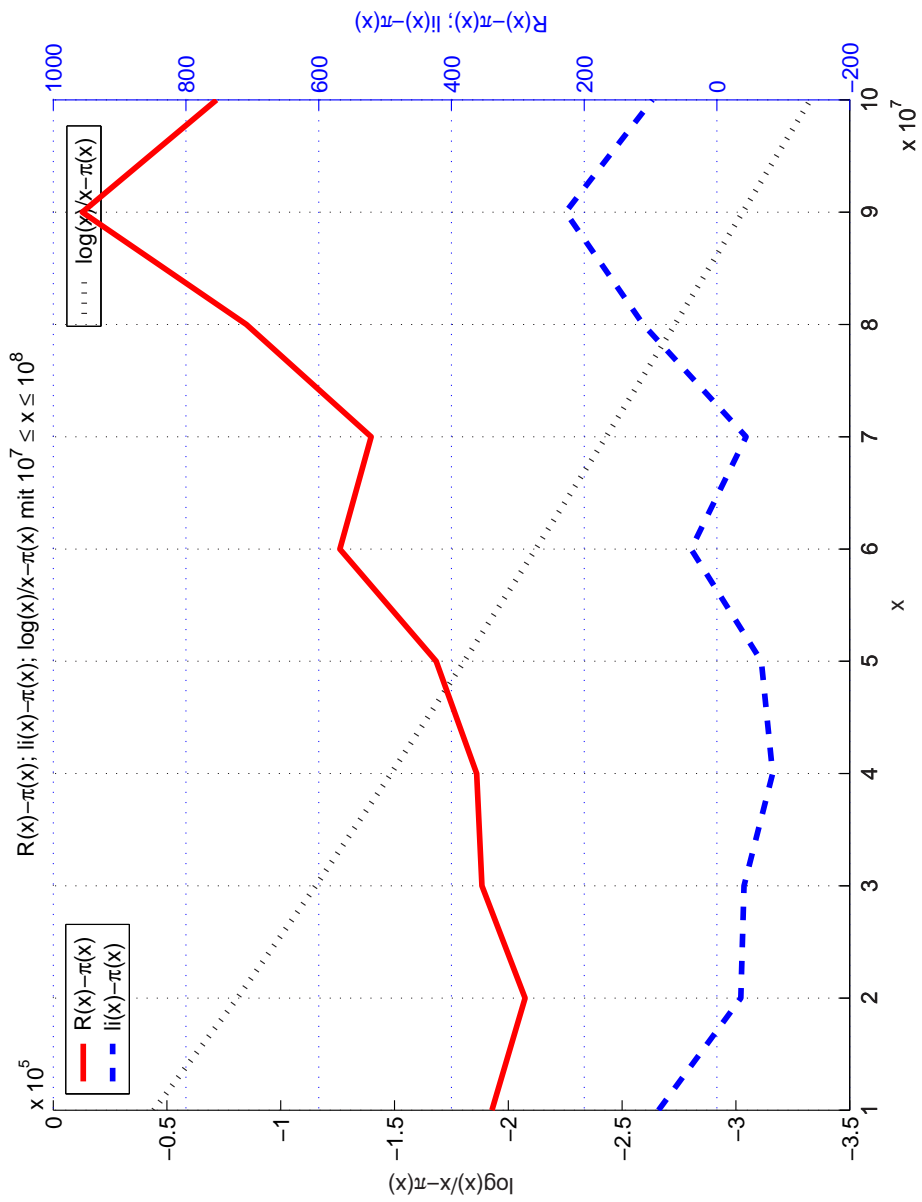


Abbildung D.7: Graphen von $R(x) - \pi(x)$; $li(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ für $10^7 \leq x \leq 10^8$

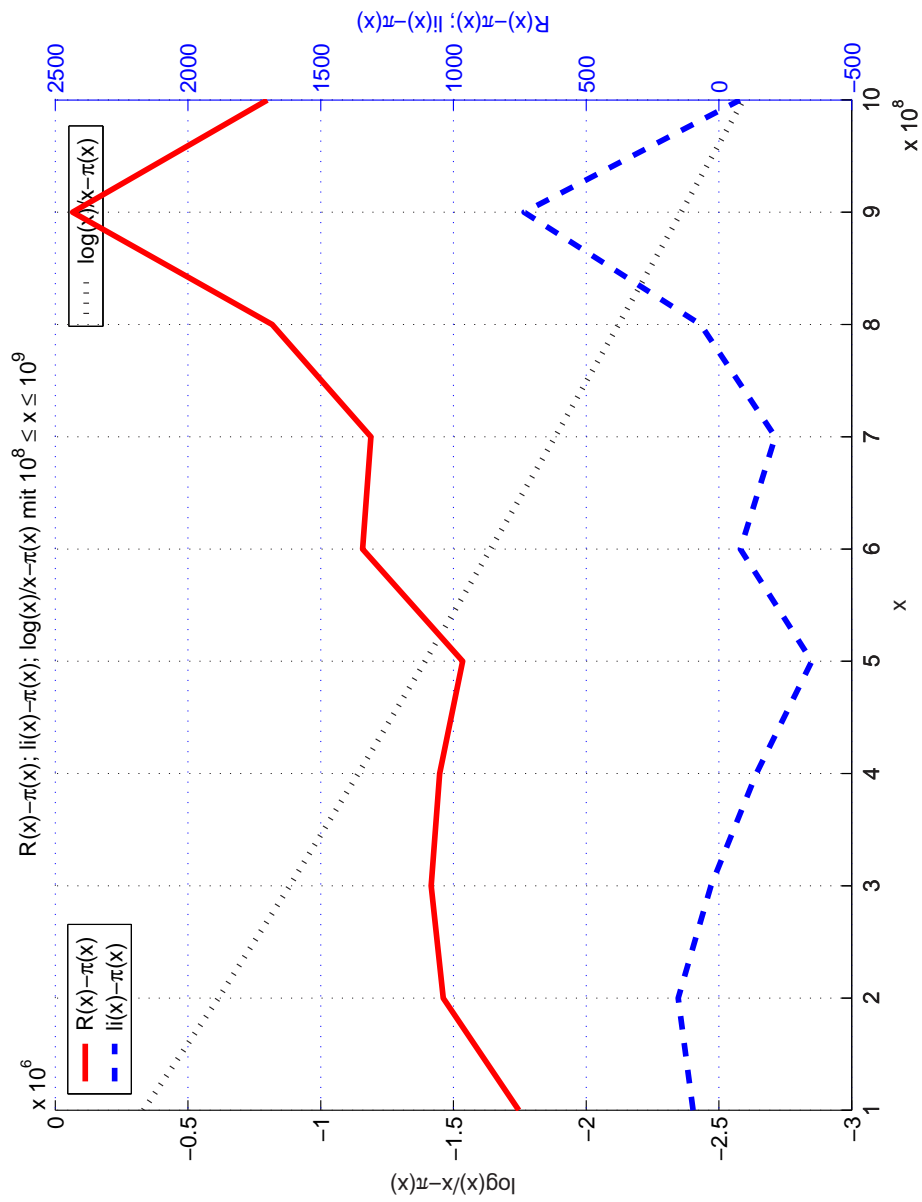


Abbildung D.8: Graphen von $R(x) - \pi(x)$; $li(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ für $10^8 \leq x \leq 10^9$

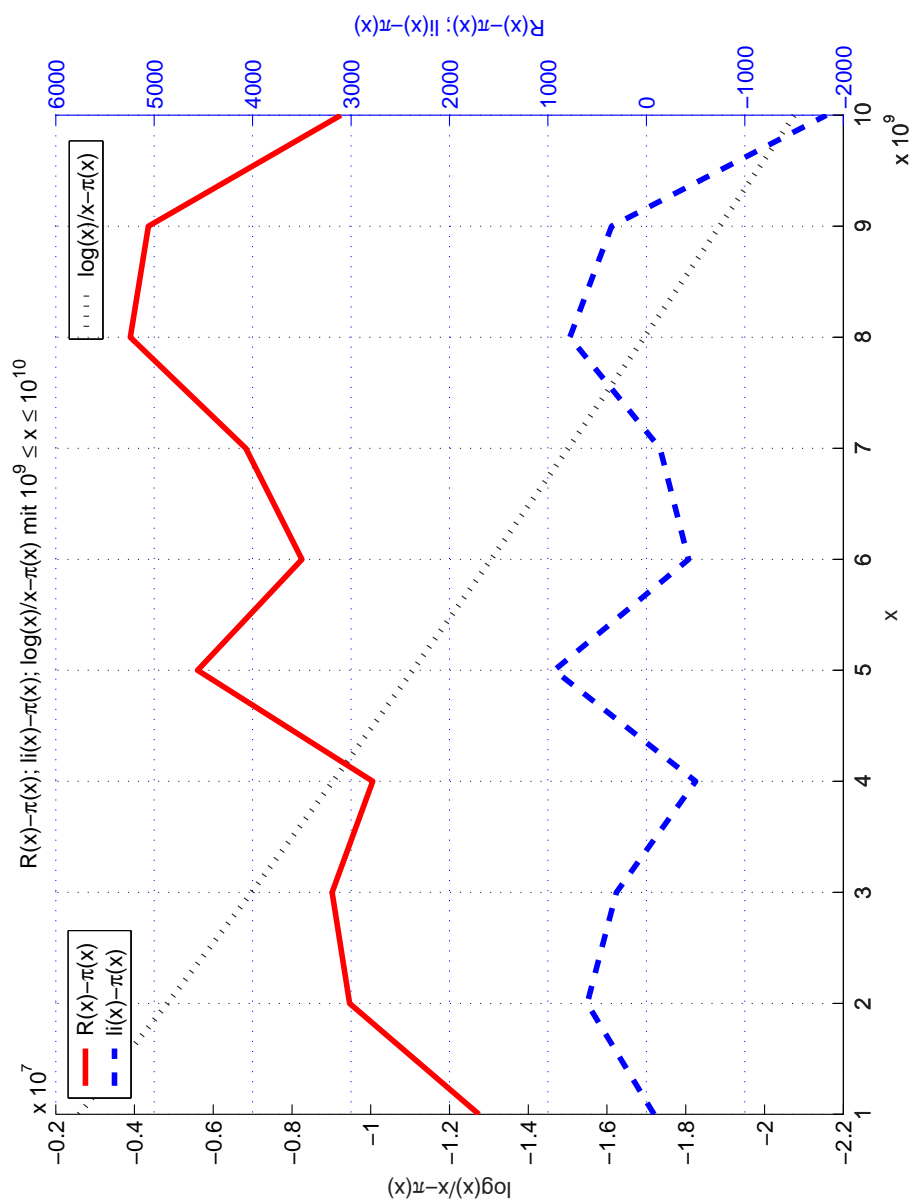


Abbildung D.9: Graphen von $R(x) - \pi(x)$; $li(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ für $10^9 \leq x \leq 10^{10}$

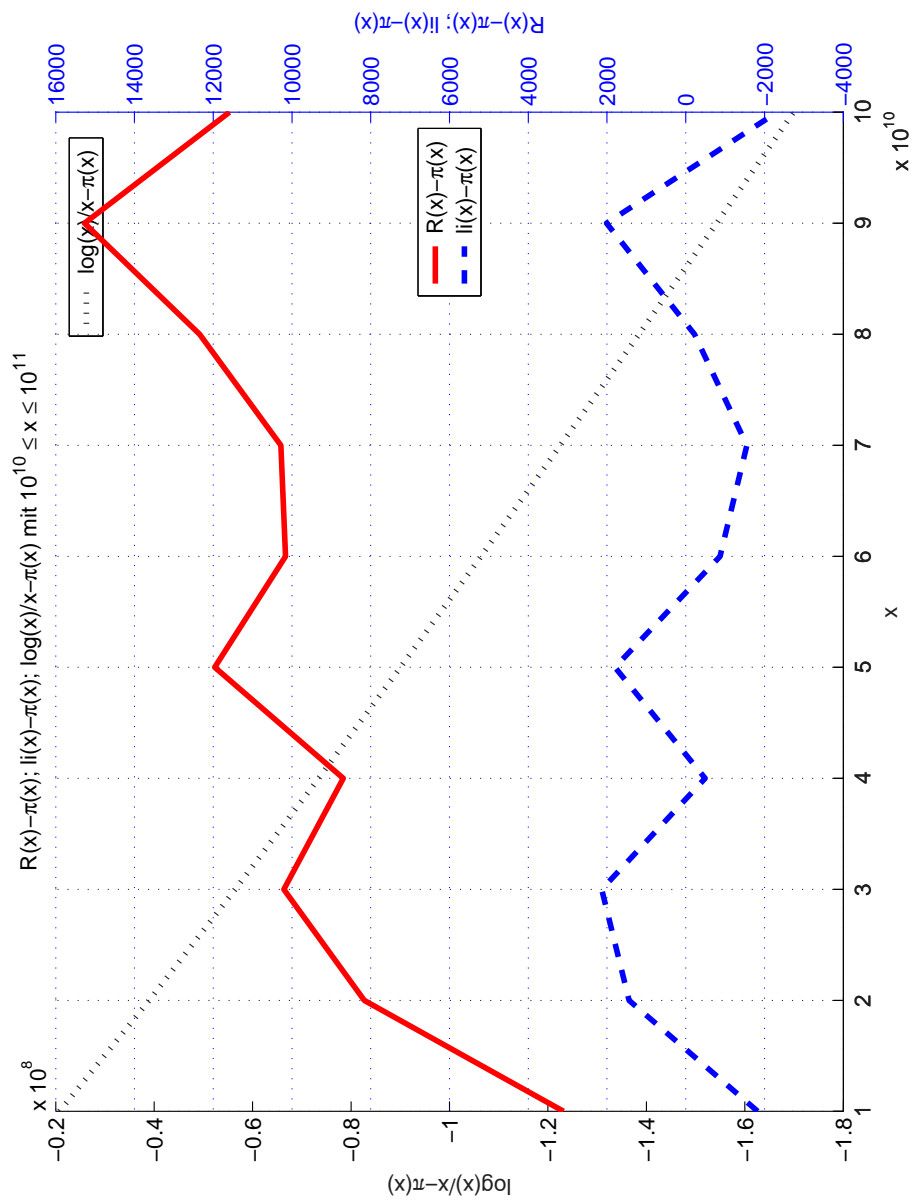


Abbildung D.10: Graphen von $R(x) - \pi(x)$; $li(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ für $10^8 \leq x \leq 10^{11}$

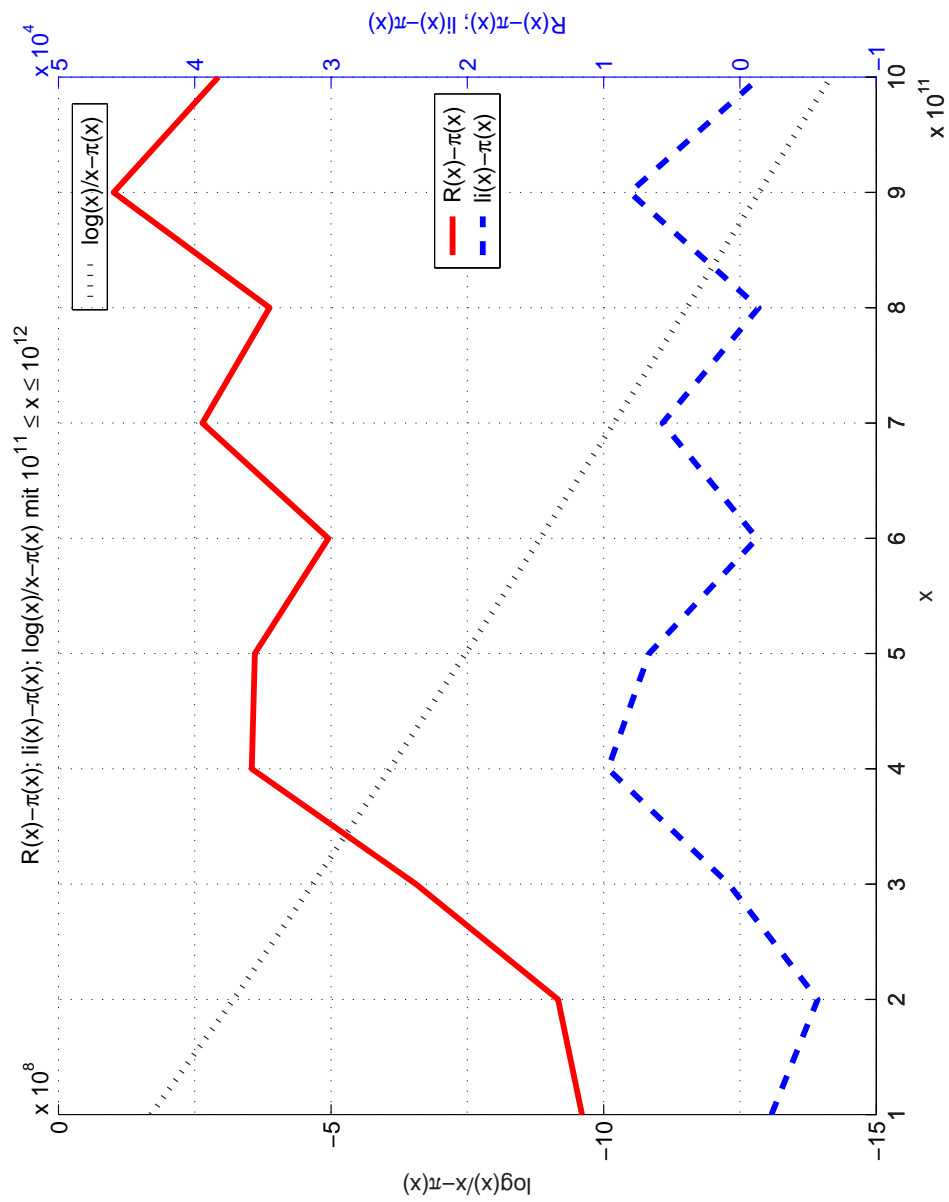


Abbildung D.11: Graphen von $R(x) - \pi(x)$; $li(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ für $10^{11} \leq x \leq 10^{12}$

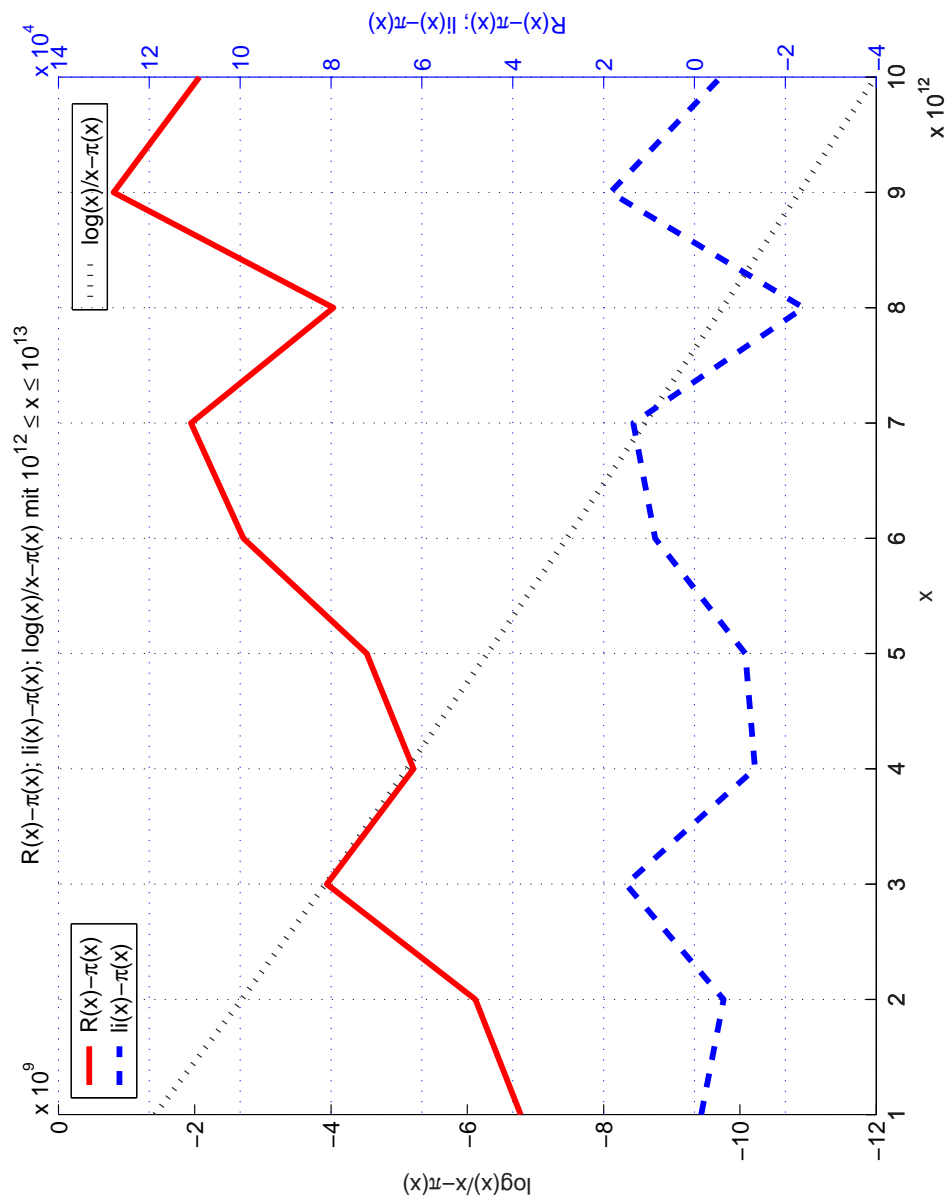


Abbildung D.12: Graphen von $R(x) - \pi(x)$; $li(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ für $10^{12} \leq x \leq 10^{13}$

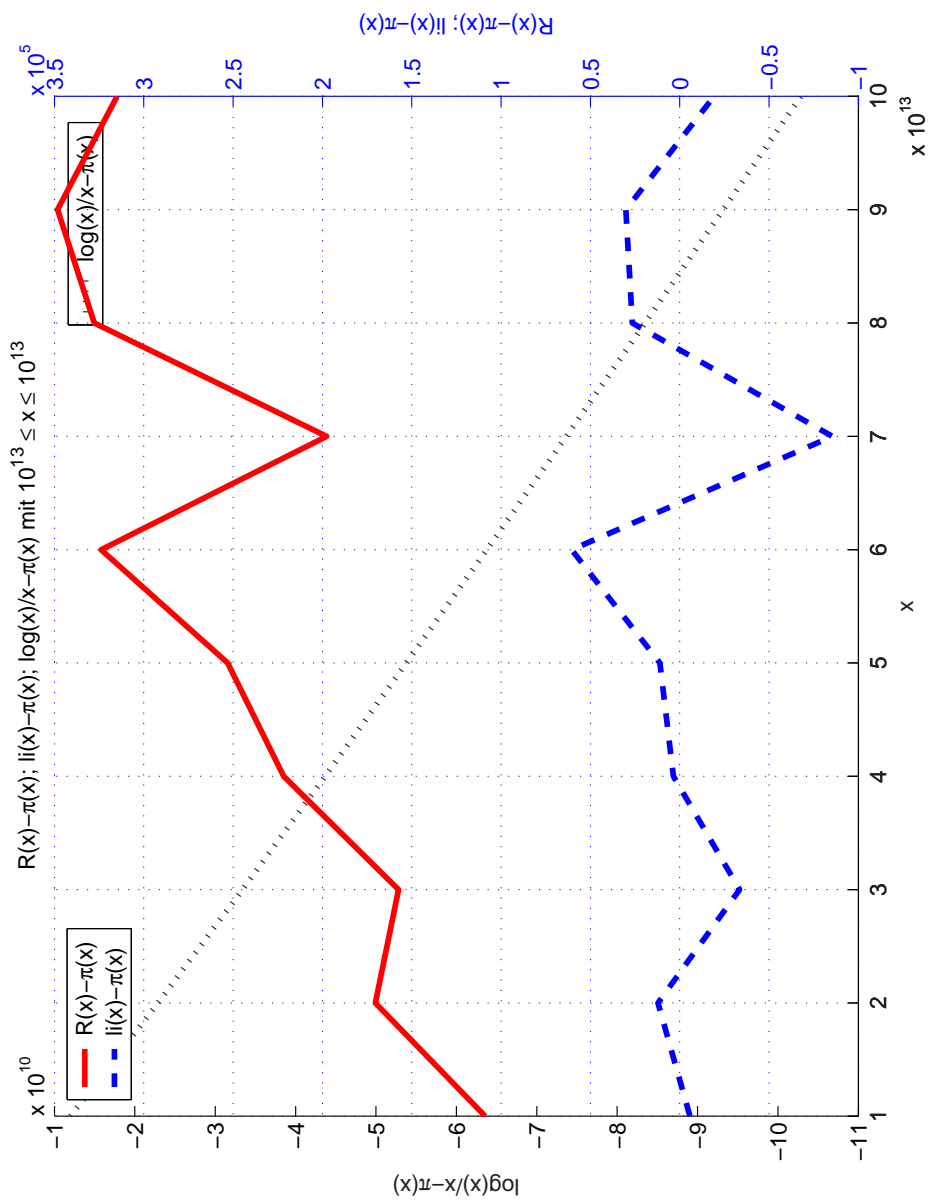


Abbildung D.13: Graphen von $R(x) - \pi(x)$; $li(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ für $10^{13} \leq x \leq 10^{14}$

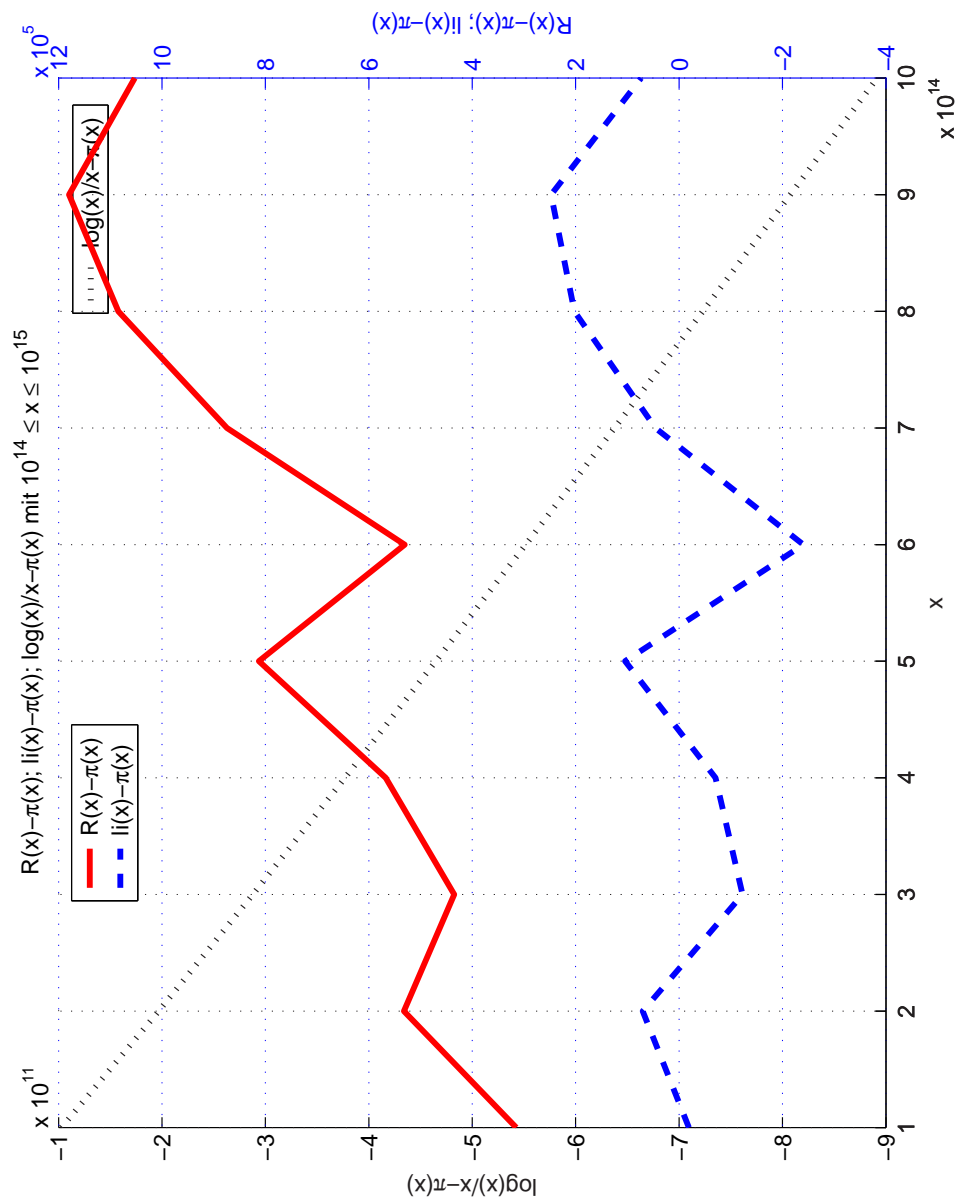


Abbildung D.14: Graphen von $R(x) - \pi(x)$; $li(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ für $10^{14} \leq x \leq 10^{15}$

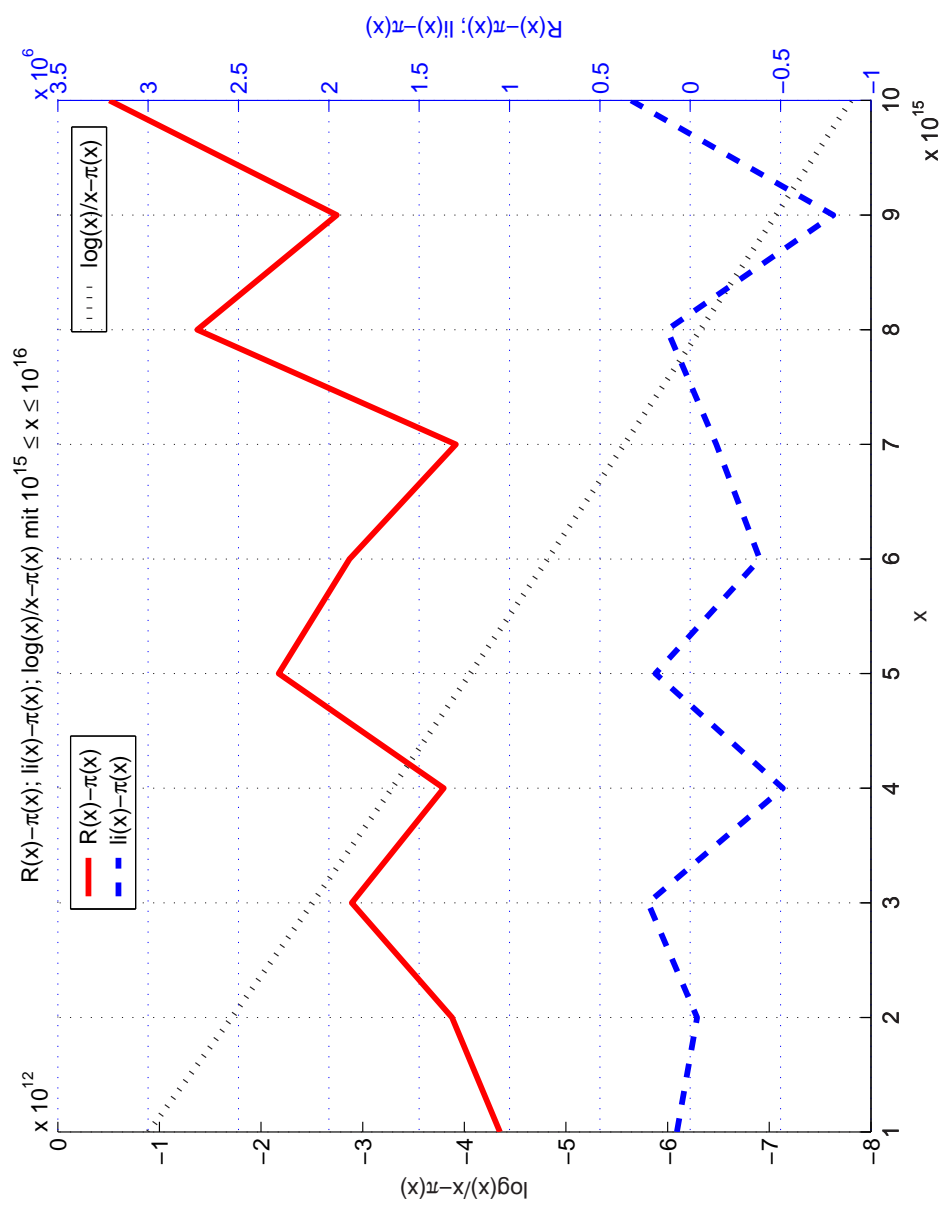


Abbildung D.15: Graphen von $R(x) - \pi(x)$; $li(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ für $10^{15} \leq x \leq 10^{16}$

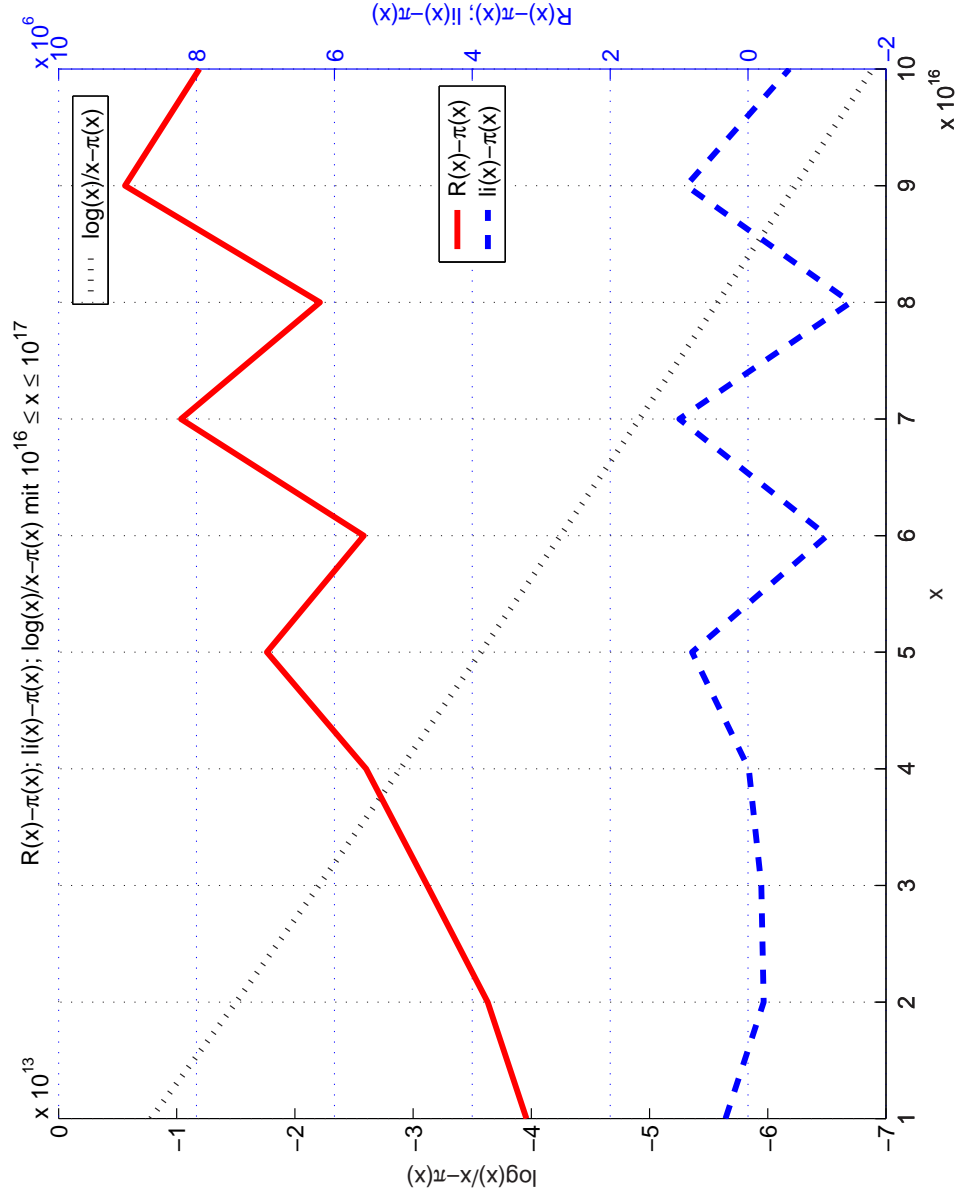


Abbildung D.16: Graphen von $R(x) - \pi(x)$; $li(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ für $10^{16} \leq x \leq 10^{17}$

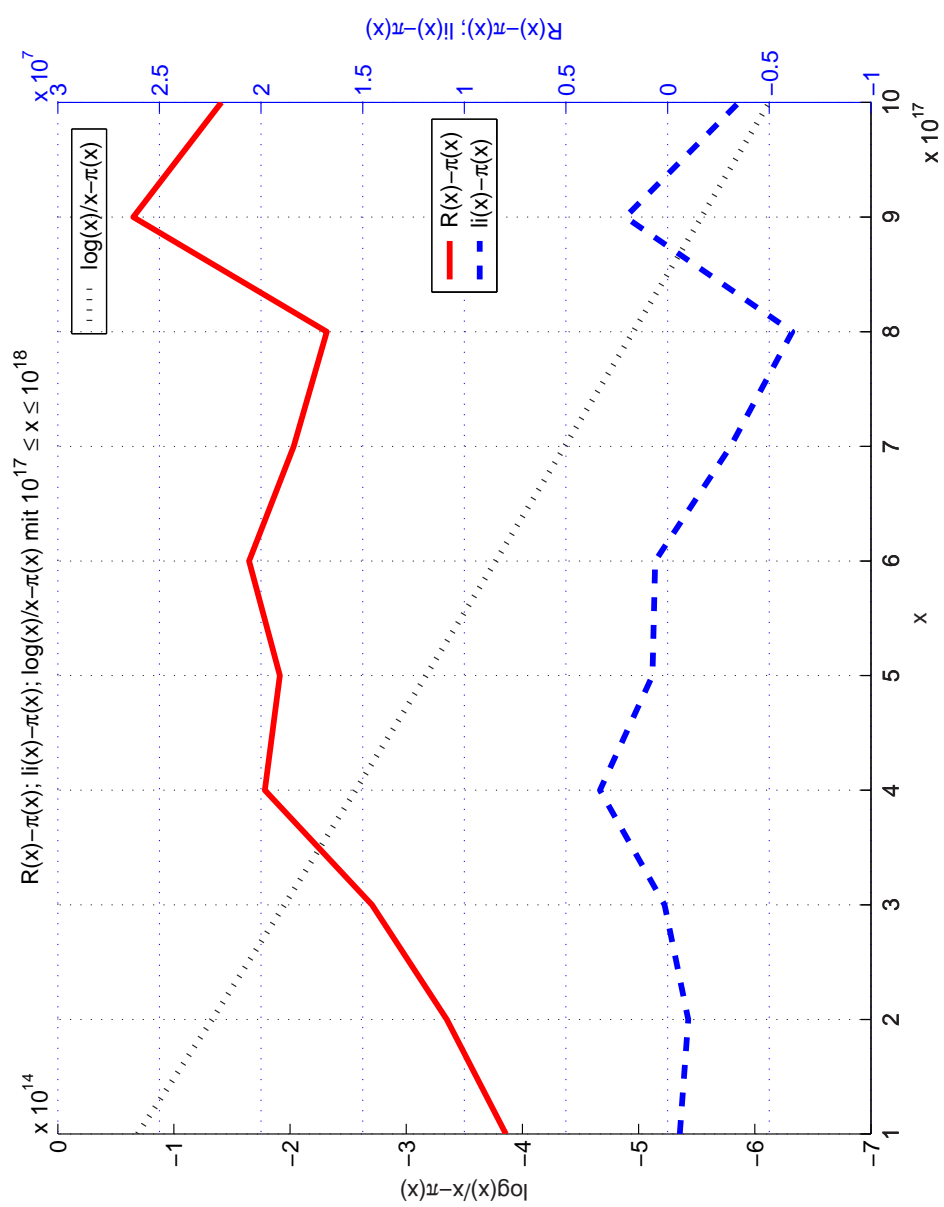


Abbildung D.17: Graphen von $R(x) - \pi(x)$; $li(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ für $10^{17} \leq x \leq 10^{18}$

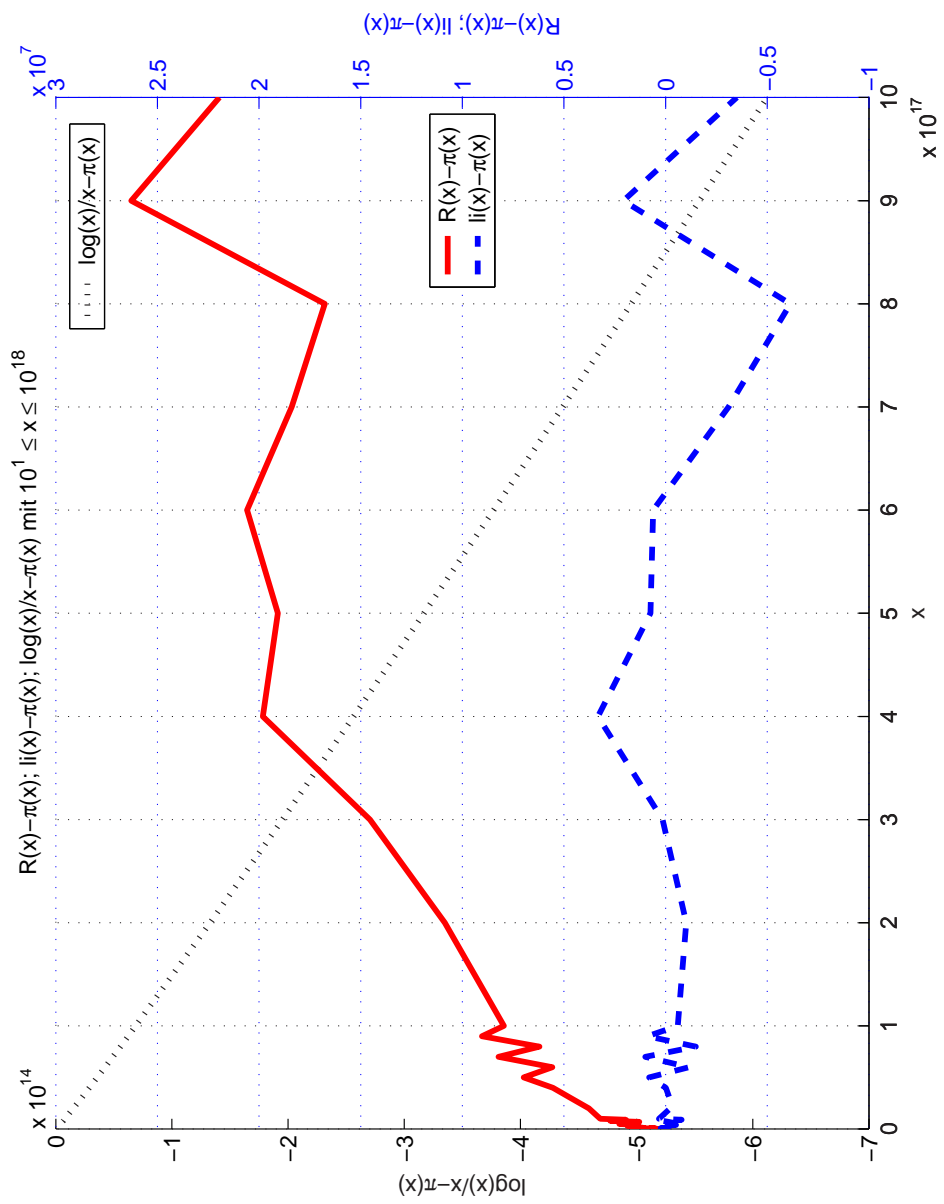


Abbildung D.18: GesamtGraphen von $R(x) - \pi(x)$; $li(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ für $10^1 \leq x \leq 10^{18}$

Anhang E

Diagramme: $R(x) - \pi(x)$ und
 $li(x) - \pi(x)$

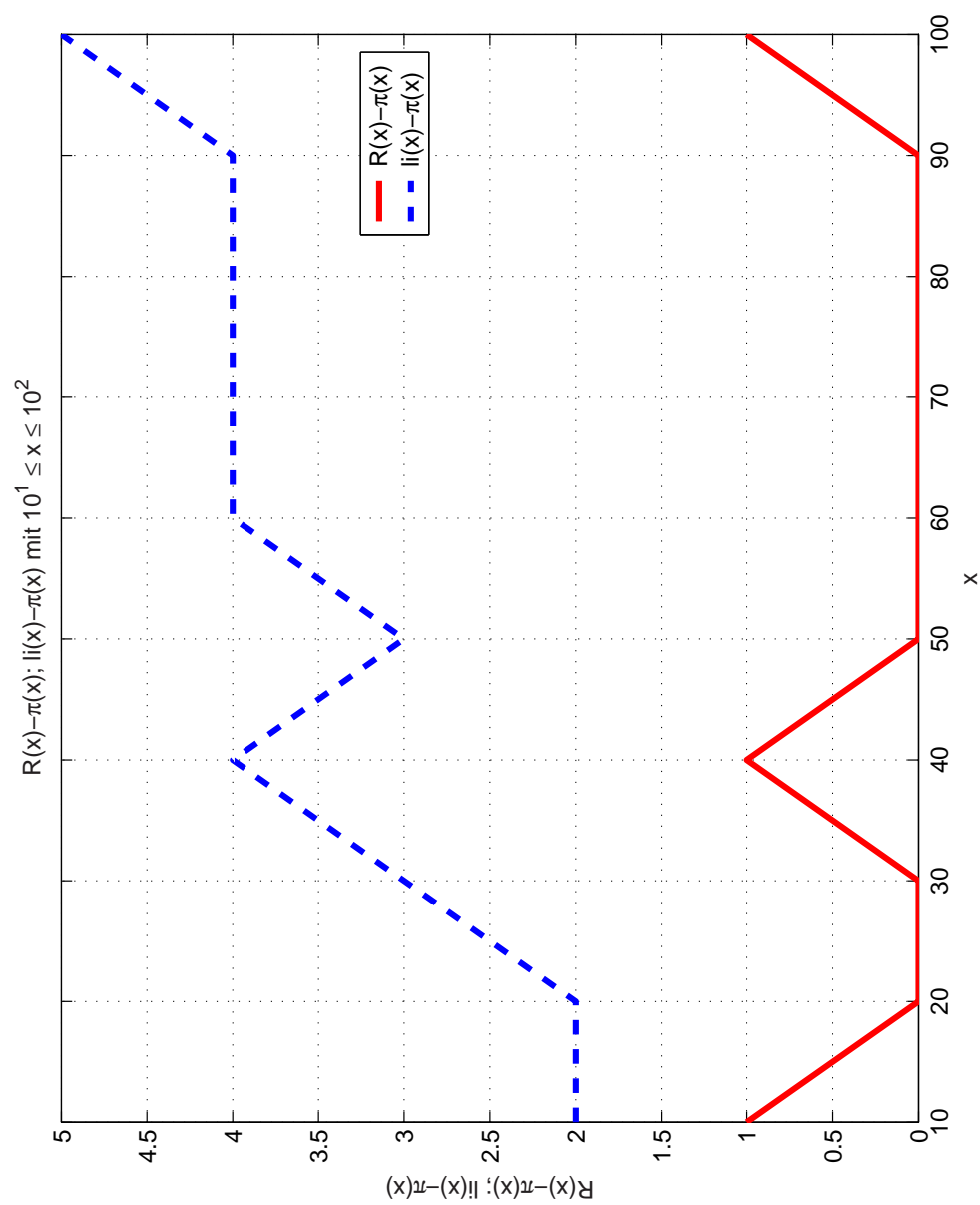


Abbildung E.1: Graphen von $R(x) - \pi(x)$ und $li(x) - \pi(x)$ für $10^1 \leq x \leq 10^2$

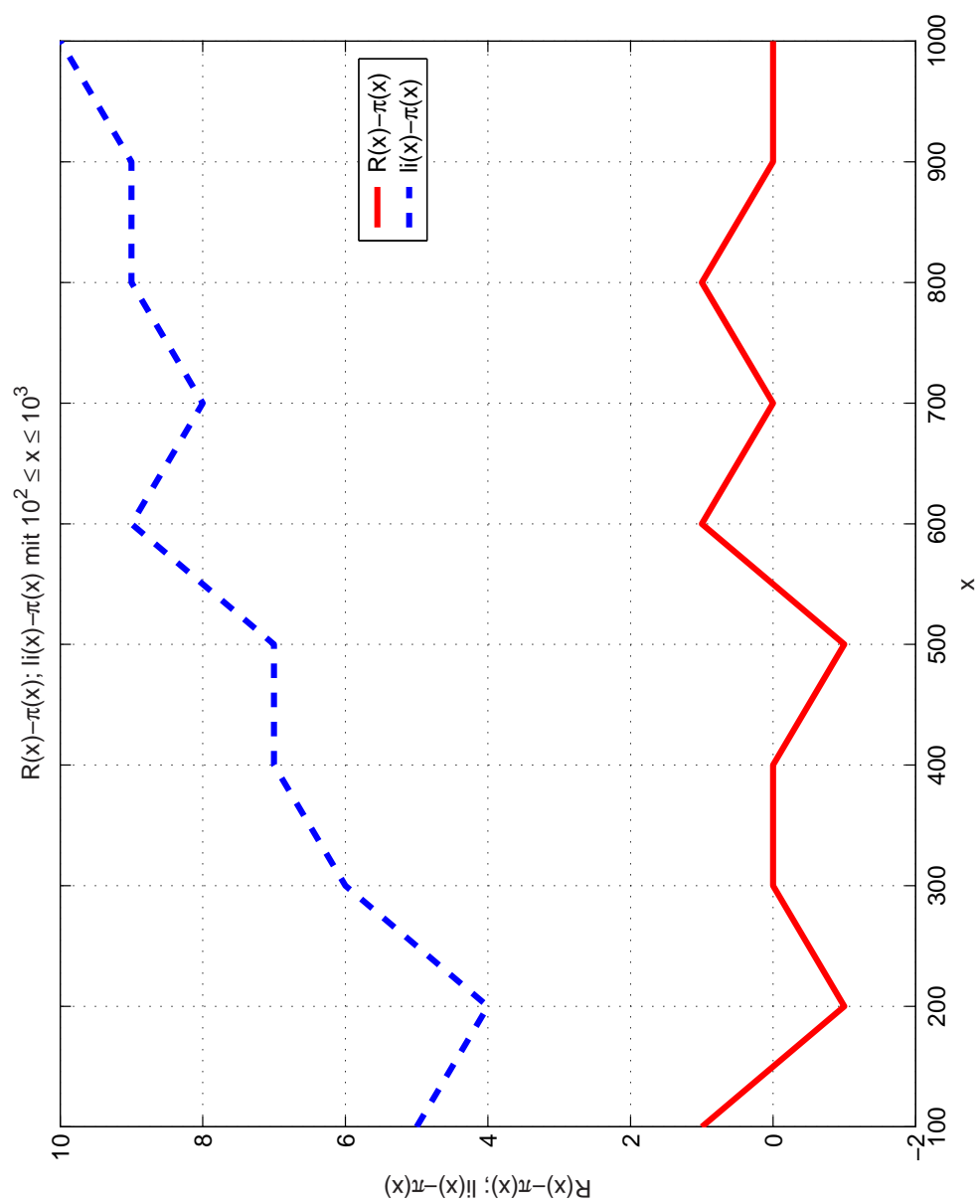


Abbildung E.2: Graphen von $R(x) - \pi(x)$ und $li(x) - \pi(x)$ für $10^2 \leq x \leq 10^3$

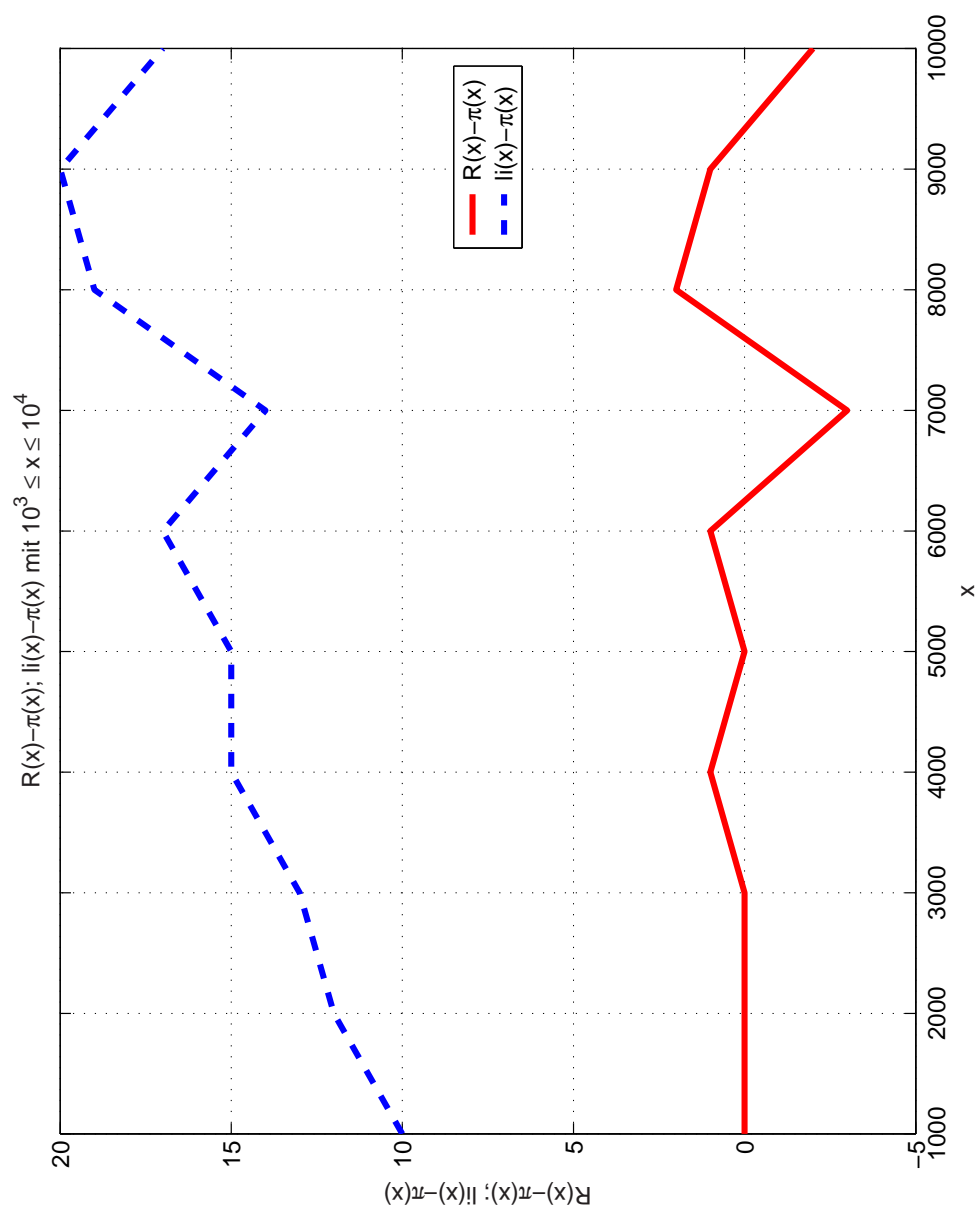


Abbildung E.3: Graphen von $R(x) - \pi(x)$ und $li(x) - \pi(x)$ für $10^3 \leq x \leq 10^4$.

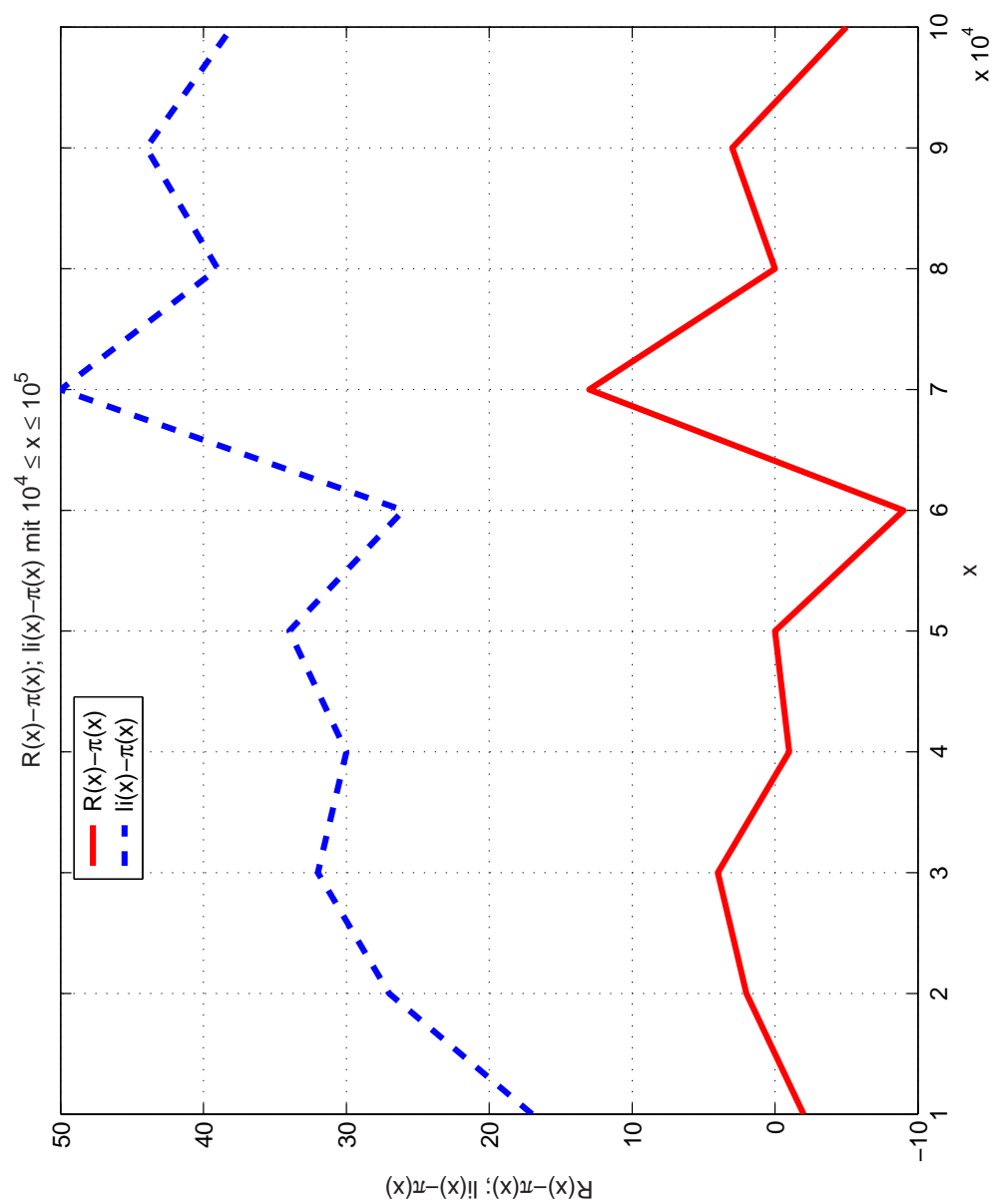


Abbildung E.4: Graphen von $R(x) - \pi(x)$ und $li(x) - \pi(x)$ für $10^4 \leq x \leq 10^5$.

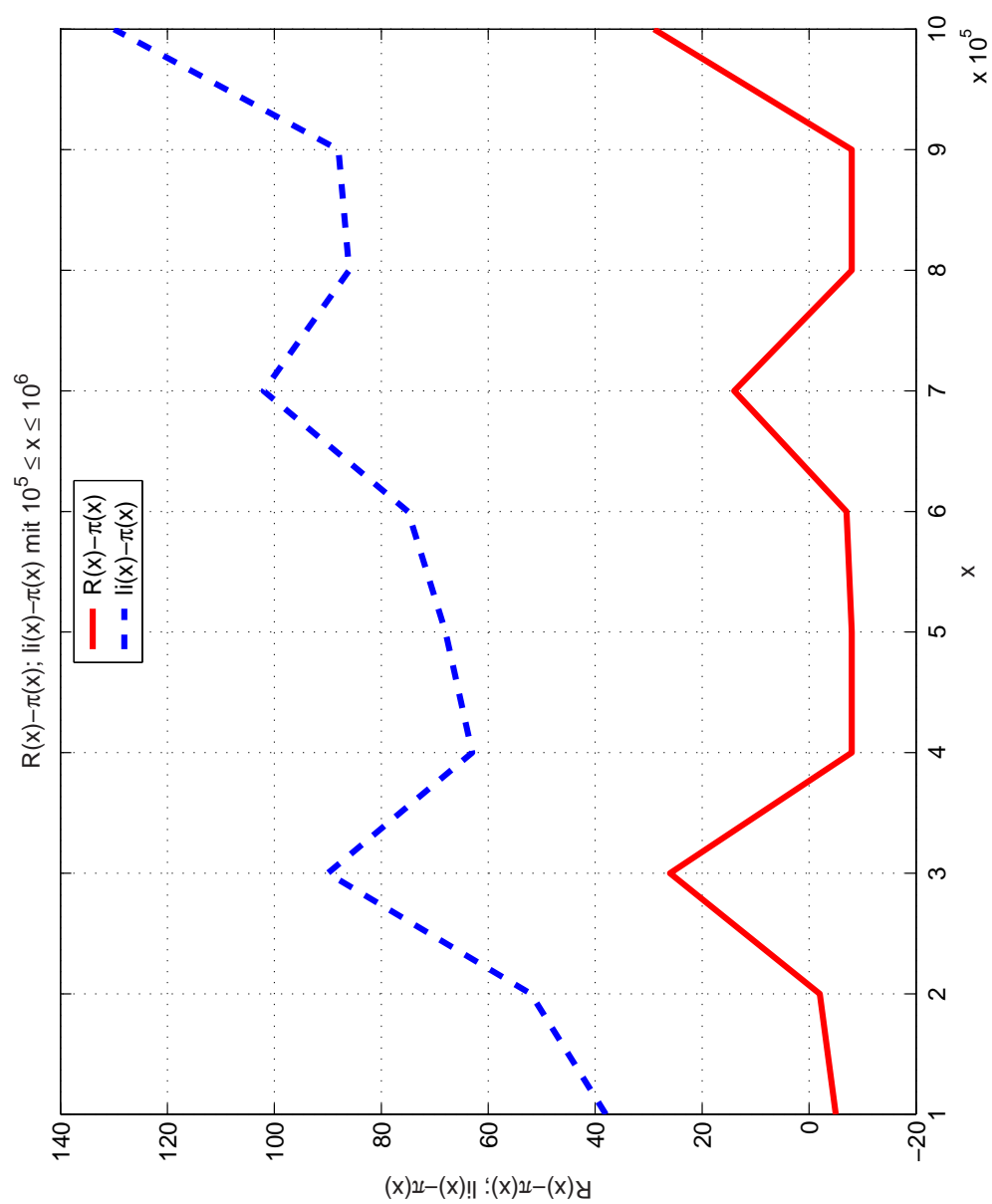


Abbildung E.5: Graphen von $R(x) - \pi(x)$ und $li(x) - \pi(x)$ für $10^5 \leq x \leq 10^6$

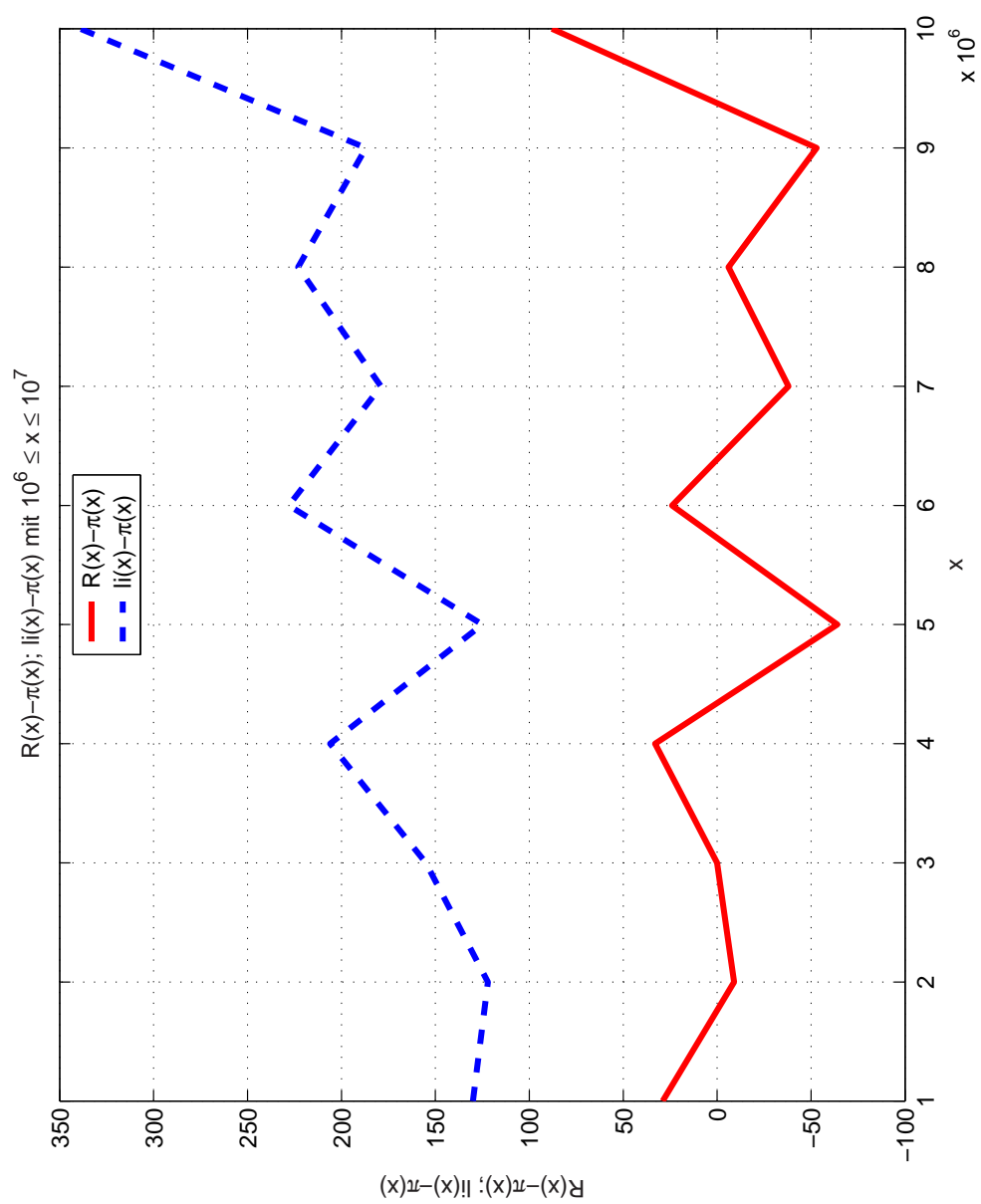


Abbildung E.6: Graphen von $R(x) - \pi(x)$ und $li(x) - \pi(x)$ für $10^6 \leq x \leq 10^7$.

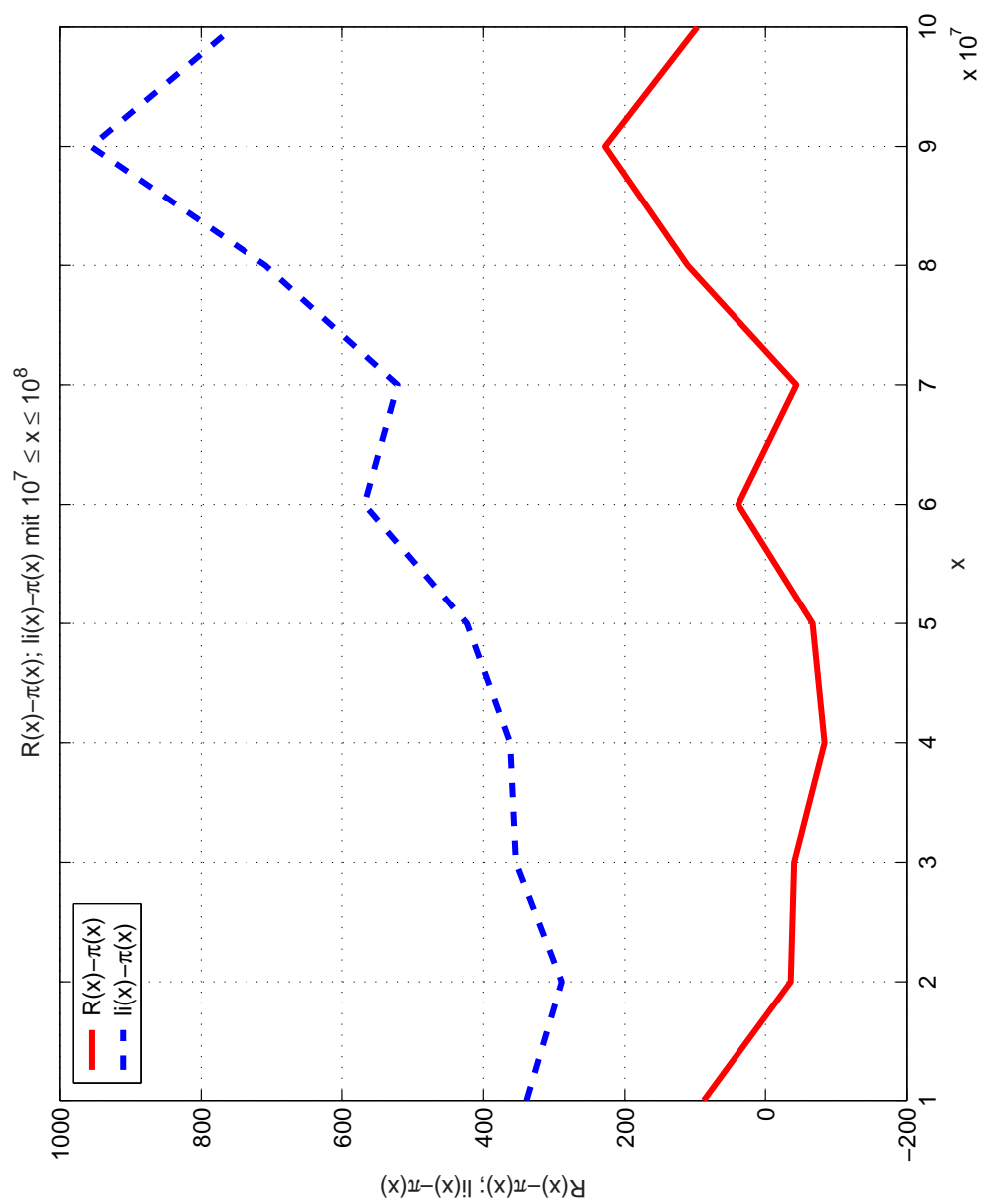


Abbildung E.7: Graphen von $R(x) - \pi(x)$ und $li(x) - \pi(x)$ für $10^7 \leq x \leq 10^8$

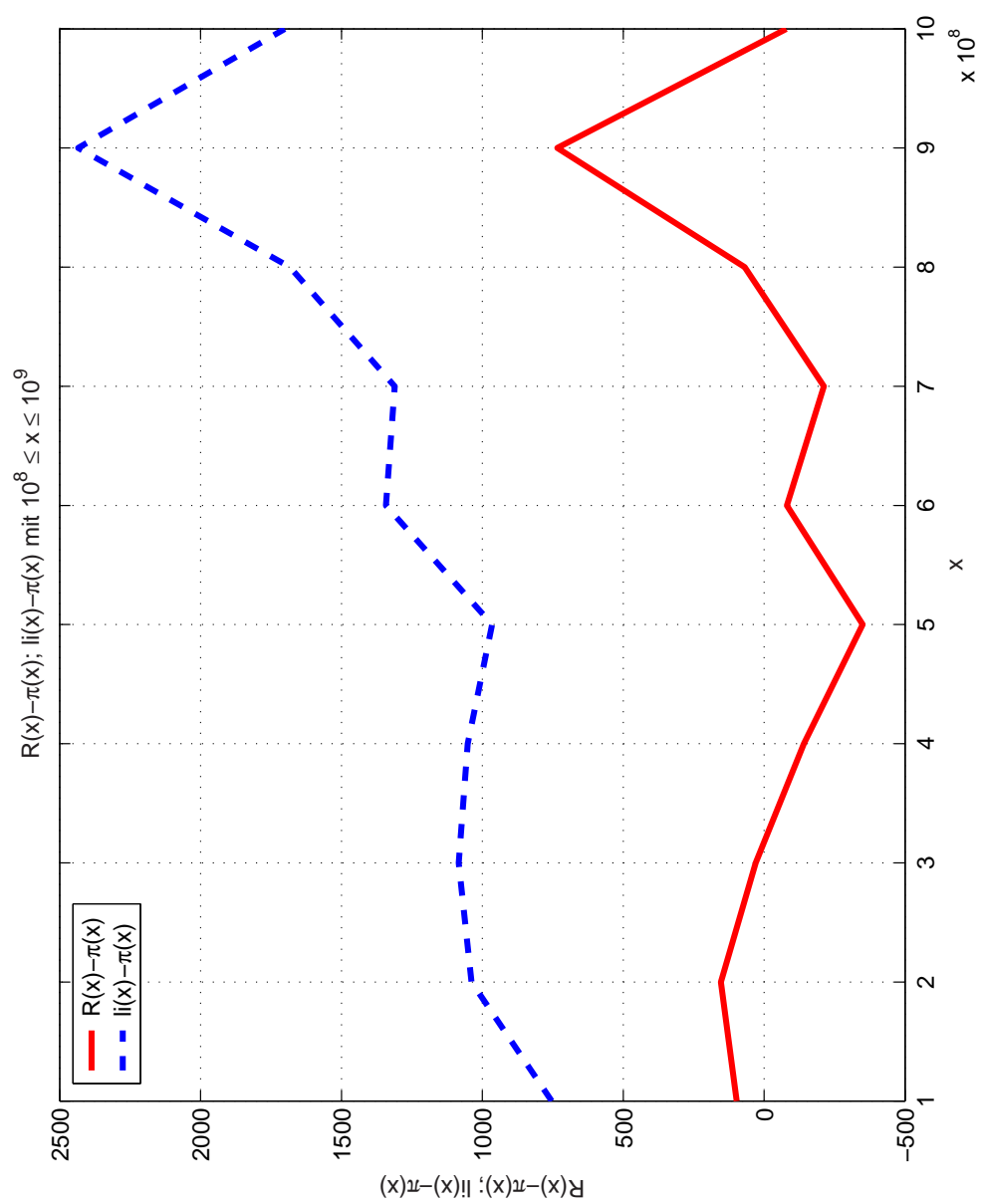


Abbildung E.8: Graphen von $R(x) - \pi(x)$ und $li(x) - \pi(x)$ für $10^8 \leq x \leq 10^9$.

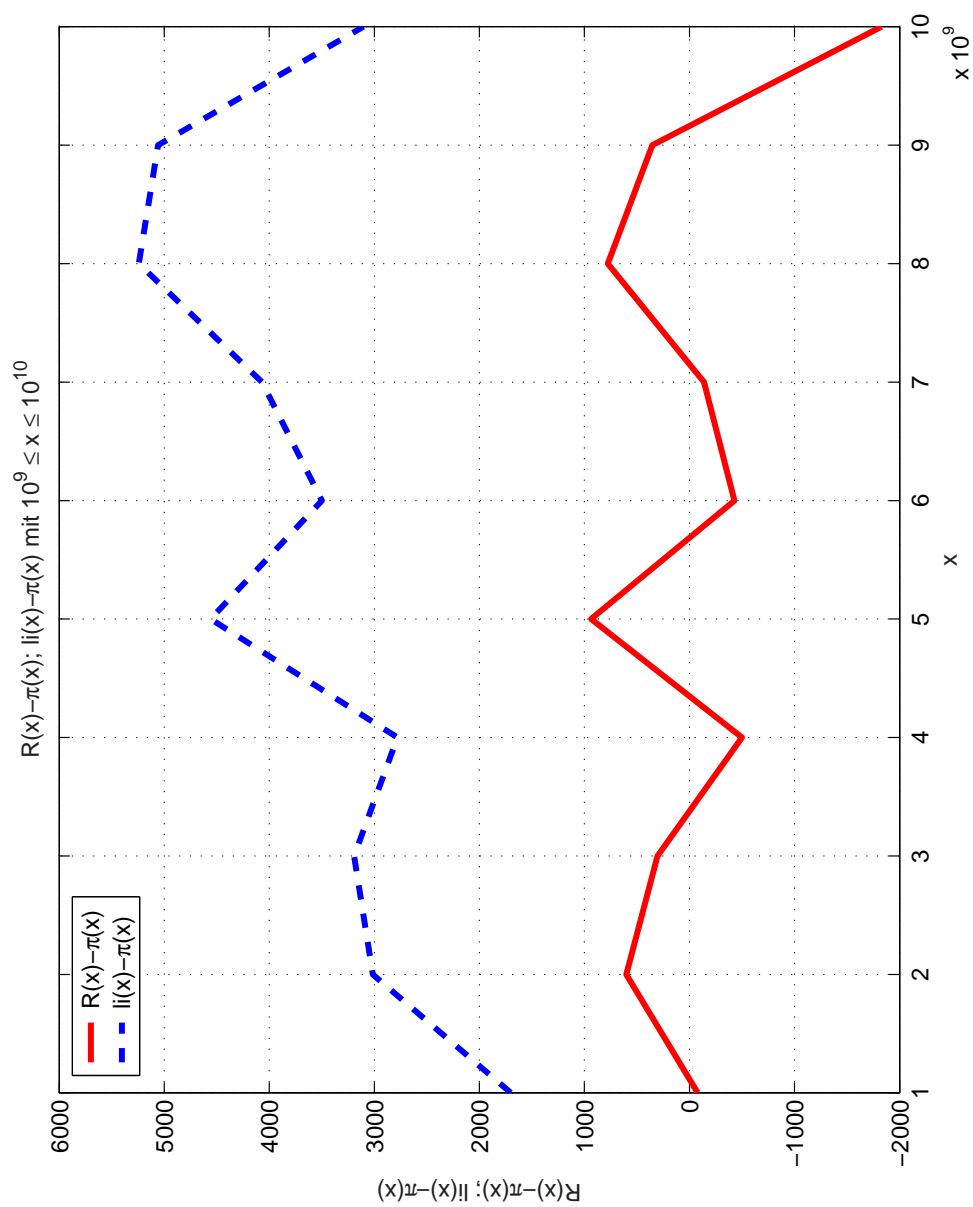


Abbildung E.9: Graphen von $R(x) - \pi(x)$ und $li(x) - \pi(x)$ für $10^9 \leq x \leq 10^{10}$

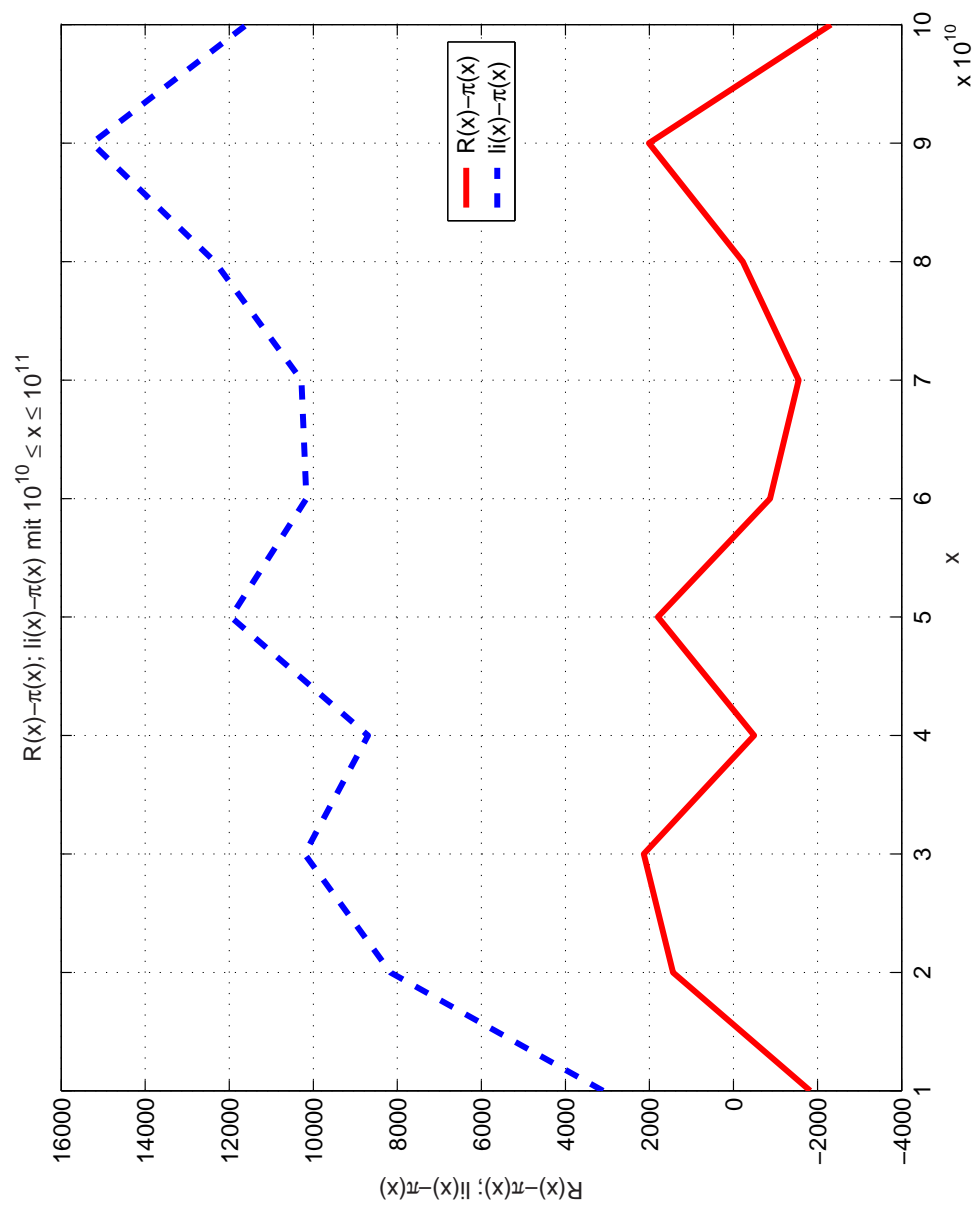


Abbildung E.10: Graphen von $R(x) - \pi(x)$ und $li(x) - \pi(x)$ für $10^{10} \leq x \leq 10^{11}$

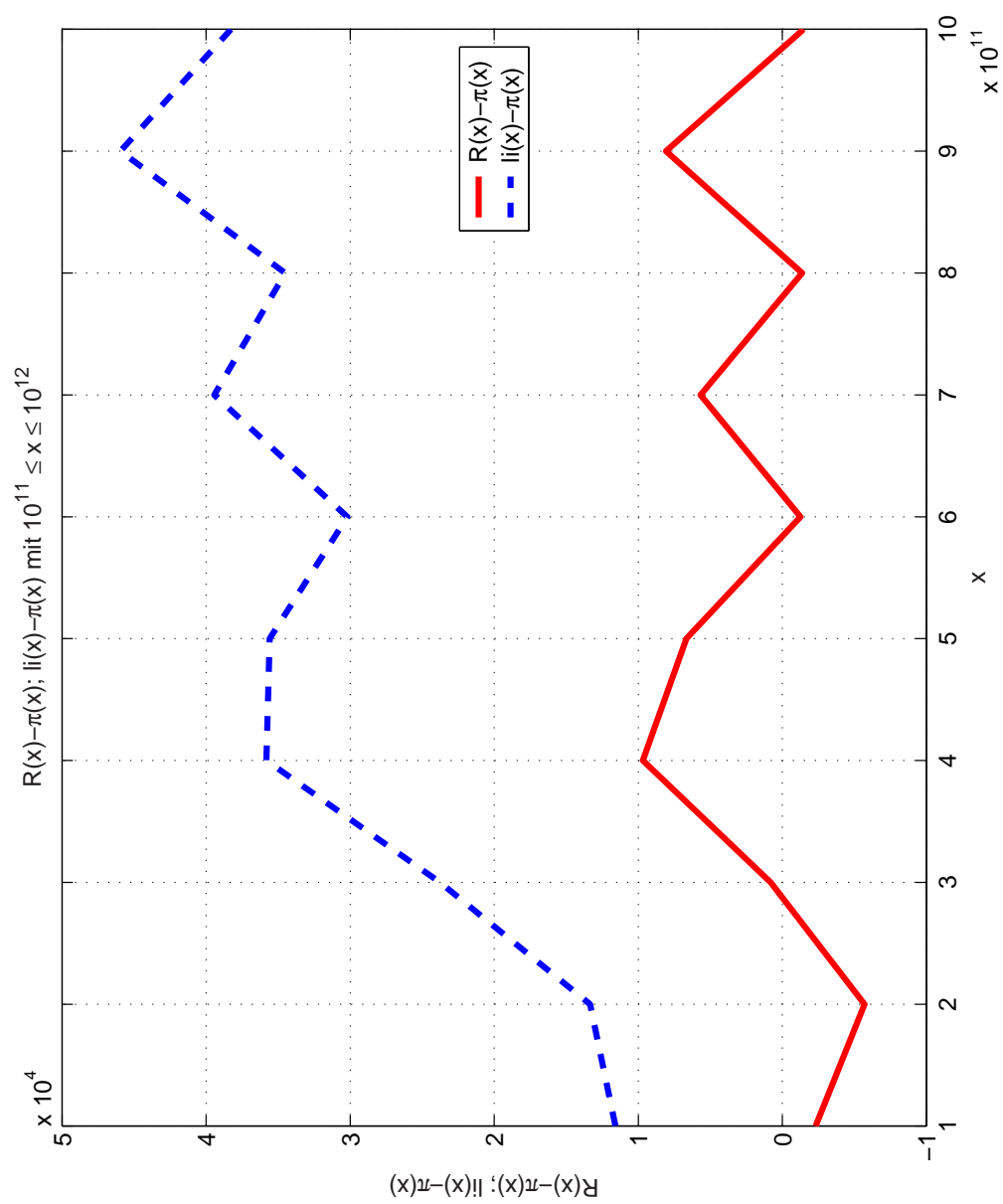


Abbildung E.11: Graphen von $R(x) - \pi(x)$ und $li(x) - \pi(x)$ für $10^{11} \leq x \leq 10^{12}$

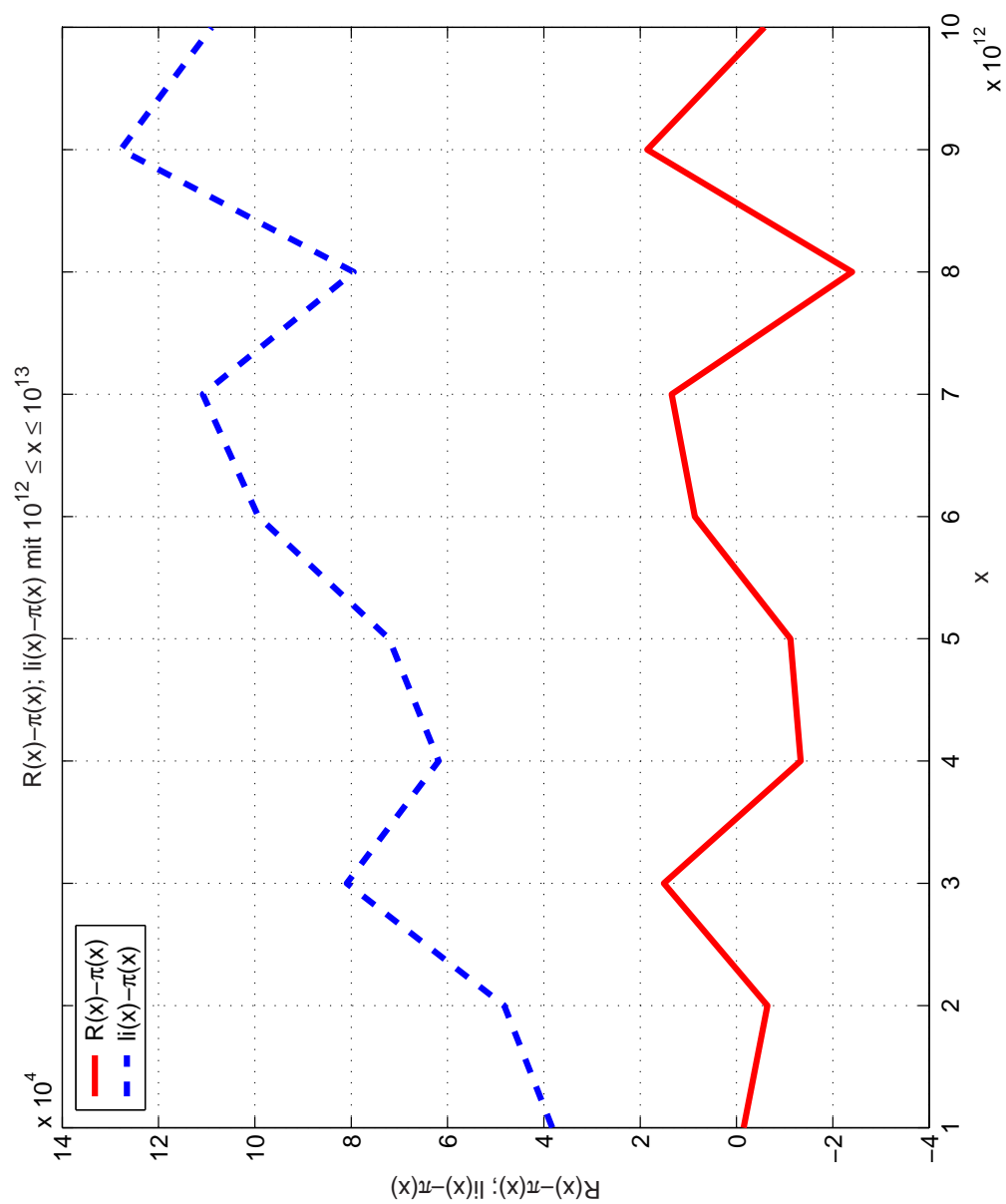


Abbildung E.12: Graphen von $R(x) - \pi(x)$ und $li(x) - \pi(x)$ für $10^{12} \leq x \leq 10^{13}$

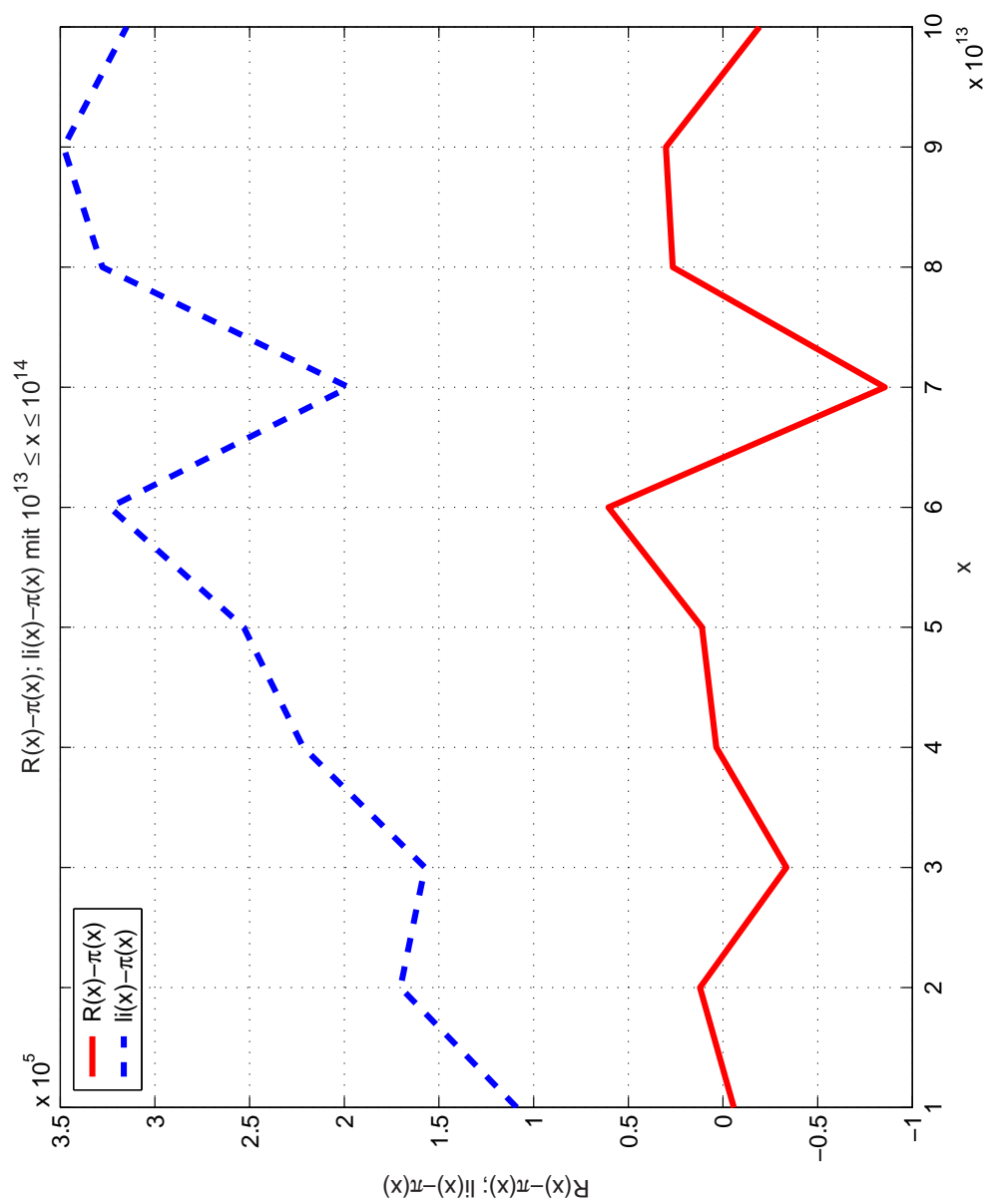


Abbildung E.13: Graphen von $R(x) - \pi(x)$ und $li(x) - \pi(x)$ für $10^{13} \leq x \leq 10^{14}$

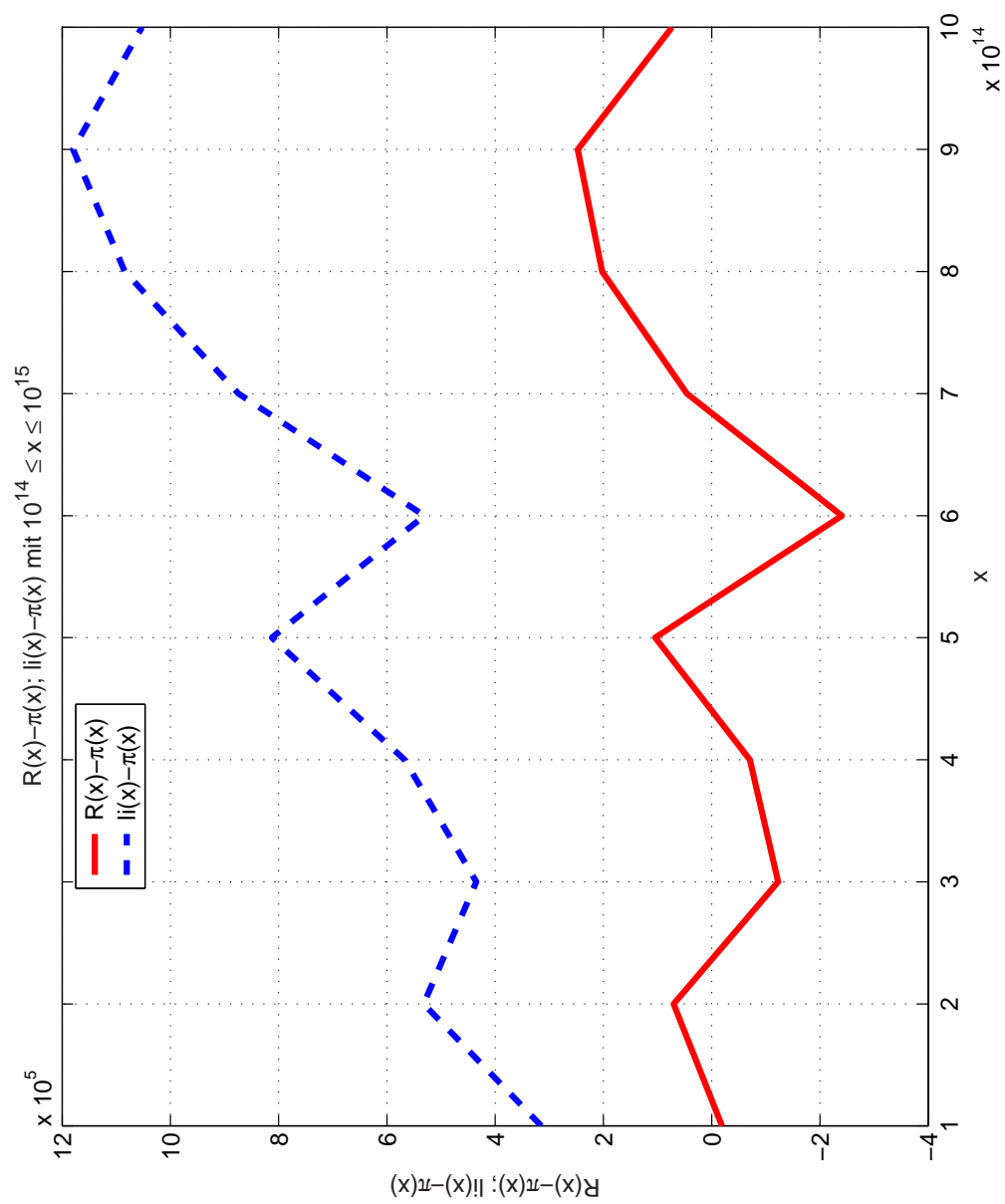


Abbildung E.14: Graphen von $R(x) - \pi(x)$ und $li(x) - \pi(x)$ für $10^{14} \leq x \leq 10^{15}$

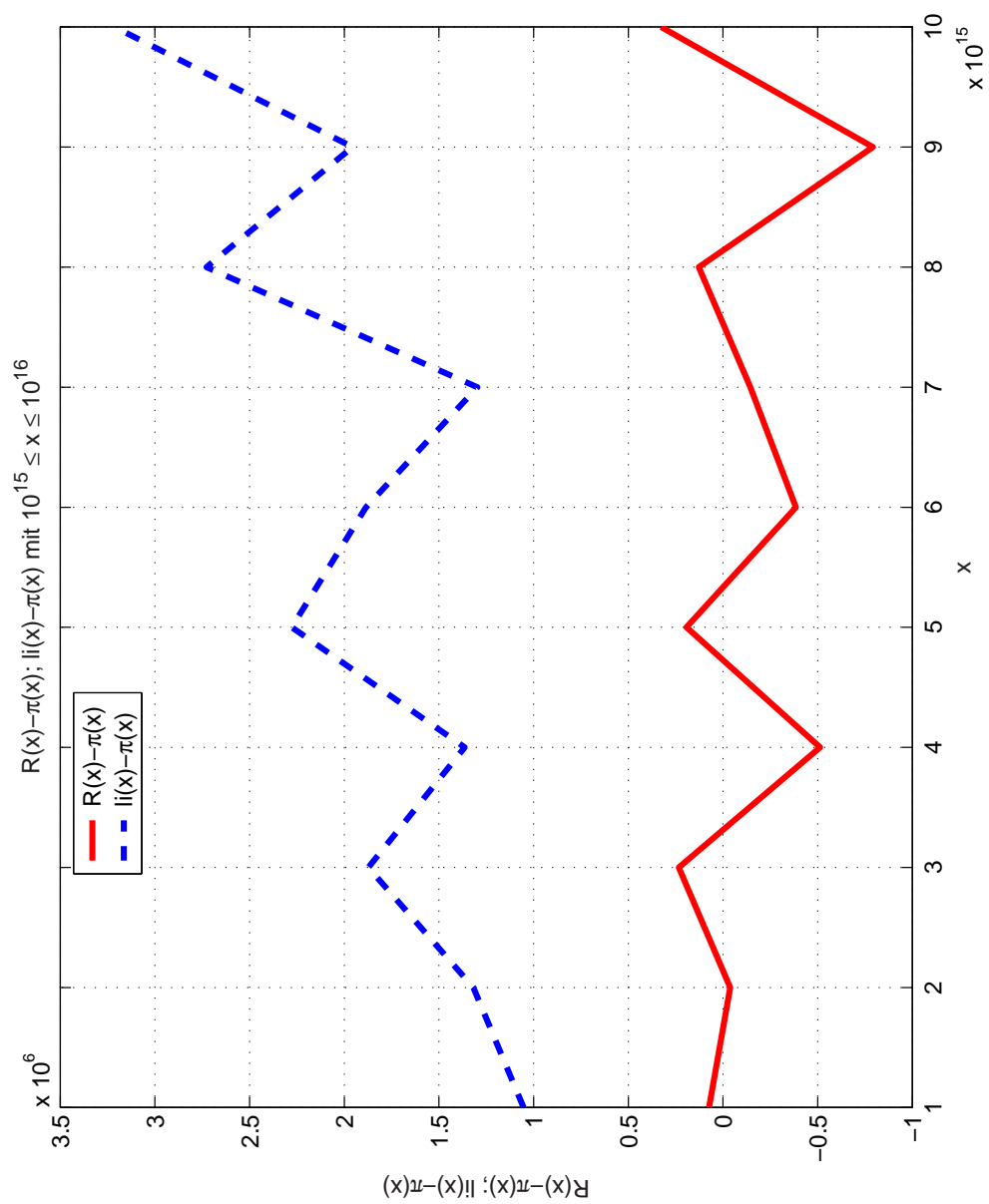


Abbildung E.15: Graphen von $R(x) - \pi(x)$ und $li(x) - \pi(x)$ für $10^{15} \leq x \leq 10^{16}$

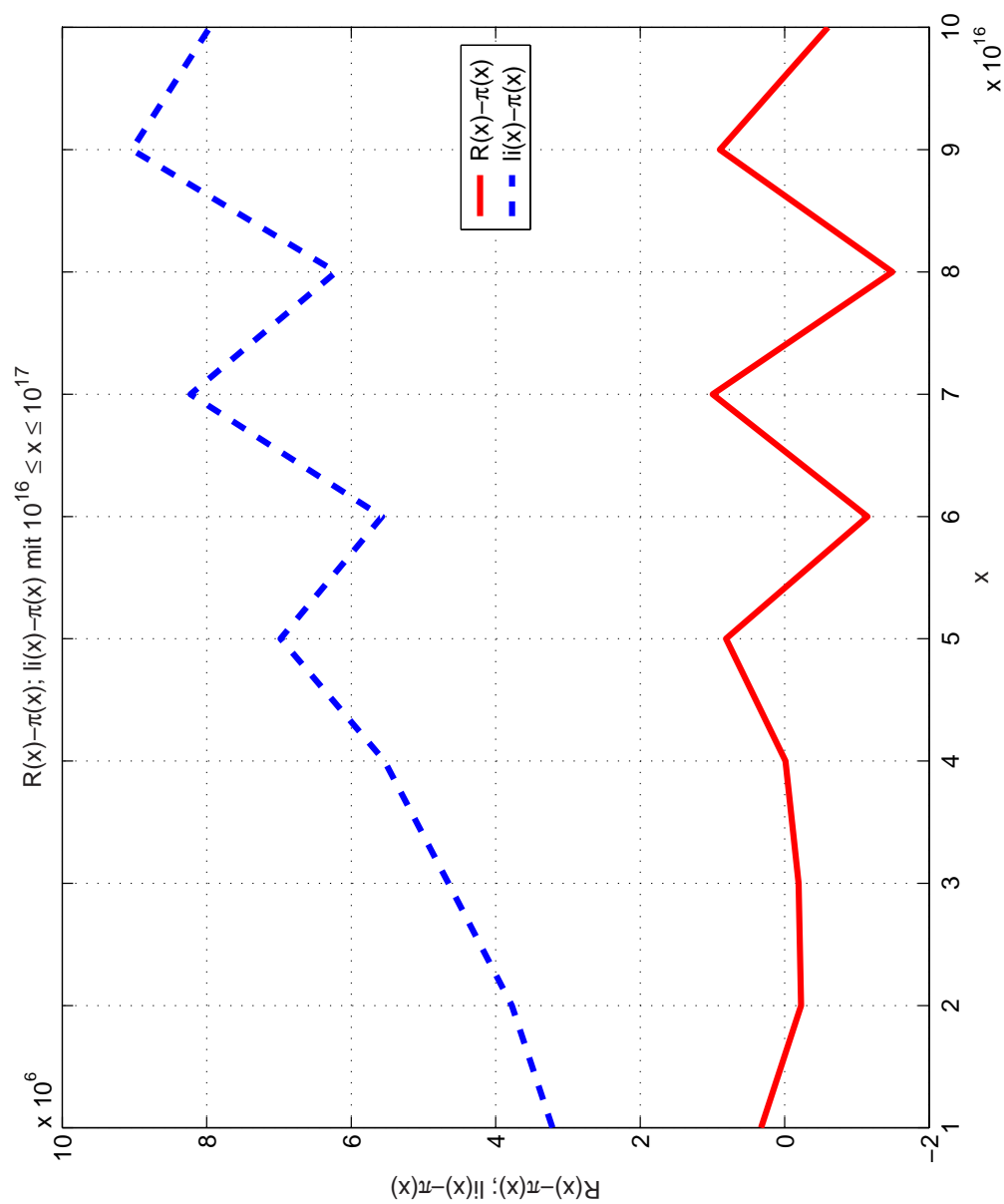


Abbildung E.16: Graphen von $R(x) - \pi(x)$ und $li(x) - \pi(x)$ für $10^{16} \leq x \leq 10^{17}$

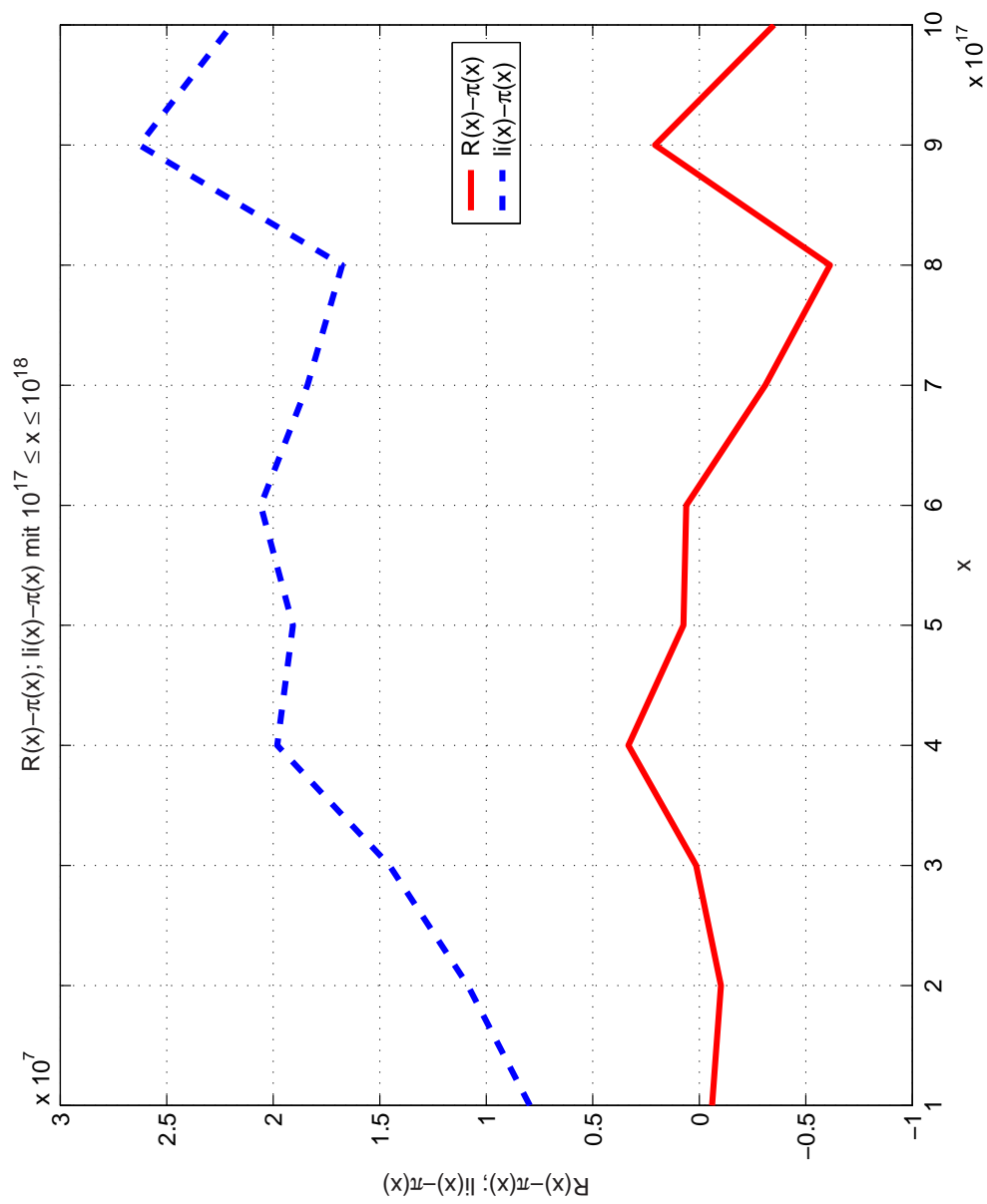


Abbildung E.17: Graphen von $R(x) - \pi(x)$ und $li(x) - \pi(x)$ für $10^{17} \leq x \leq 10^{18}$

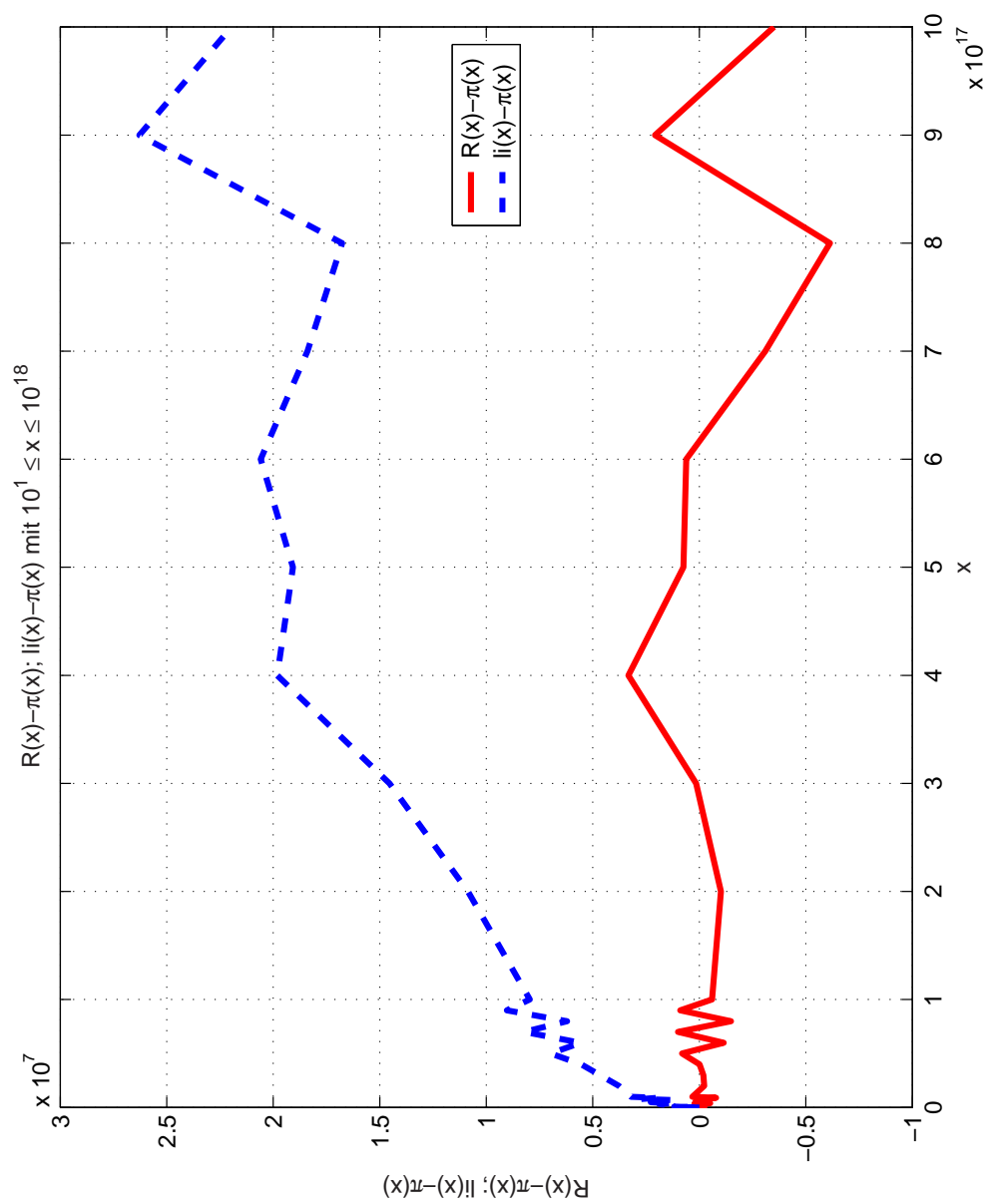


Abbildung E.18: GesamtGraphen von $R(x) - \pi(x)$ und $li(x) - \pi(x)$ für $10^1 \leq x \leq 10^{18}$

Anhang F

Diagramme: $R(x) - \pi(x)$;

$li(x) - \pi(x)$ **und** $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$

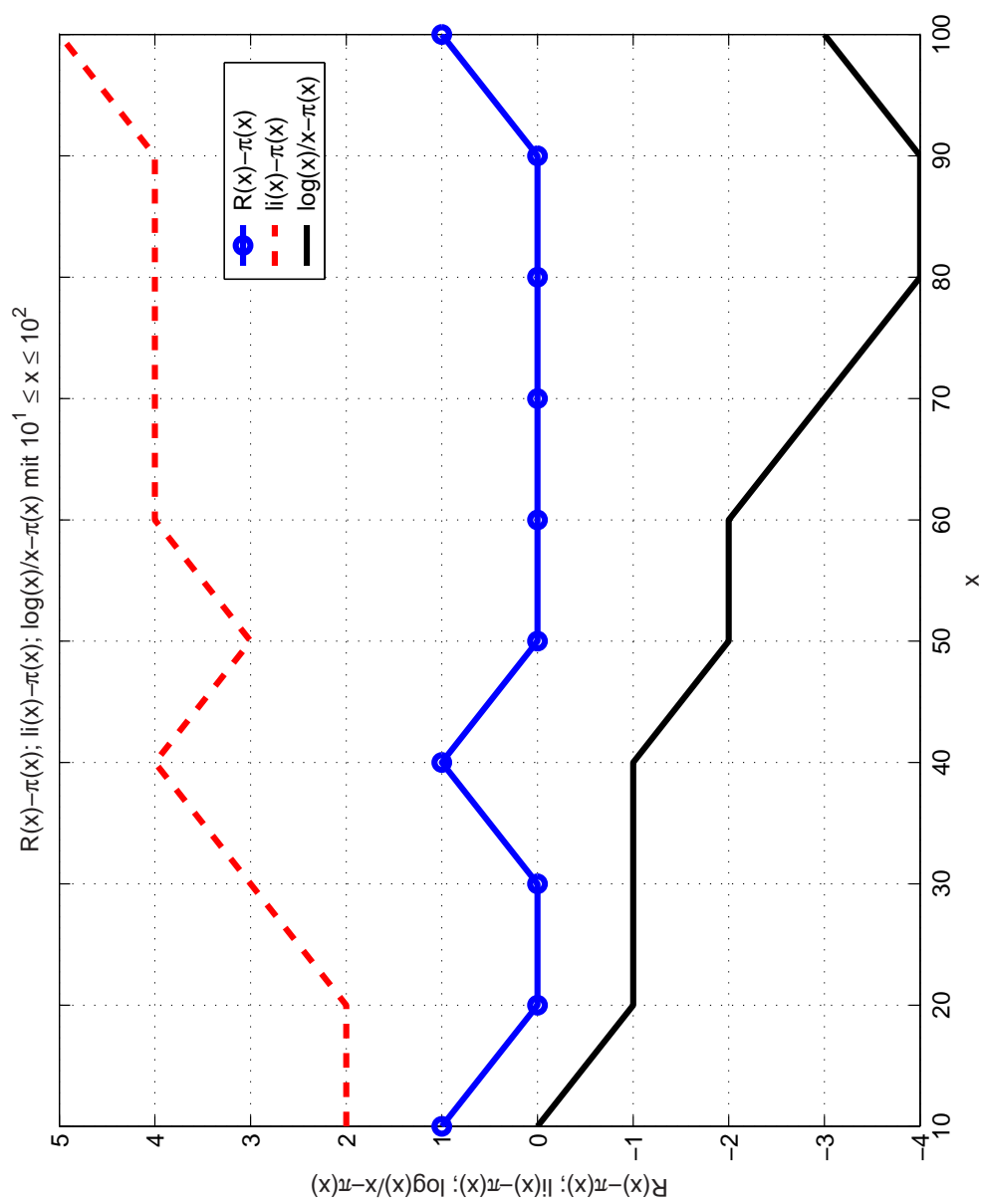


Abbildung F.1: Graphen von $R(x) - \pi(x)$; $li(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ für $10^1 \leq x \leq 10^2$

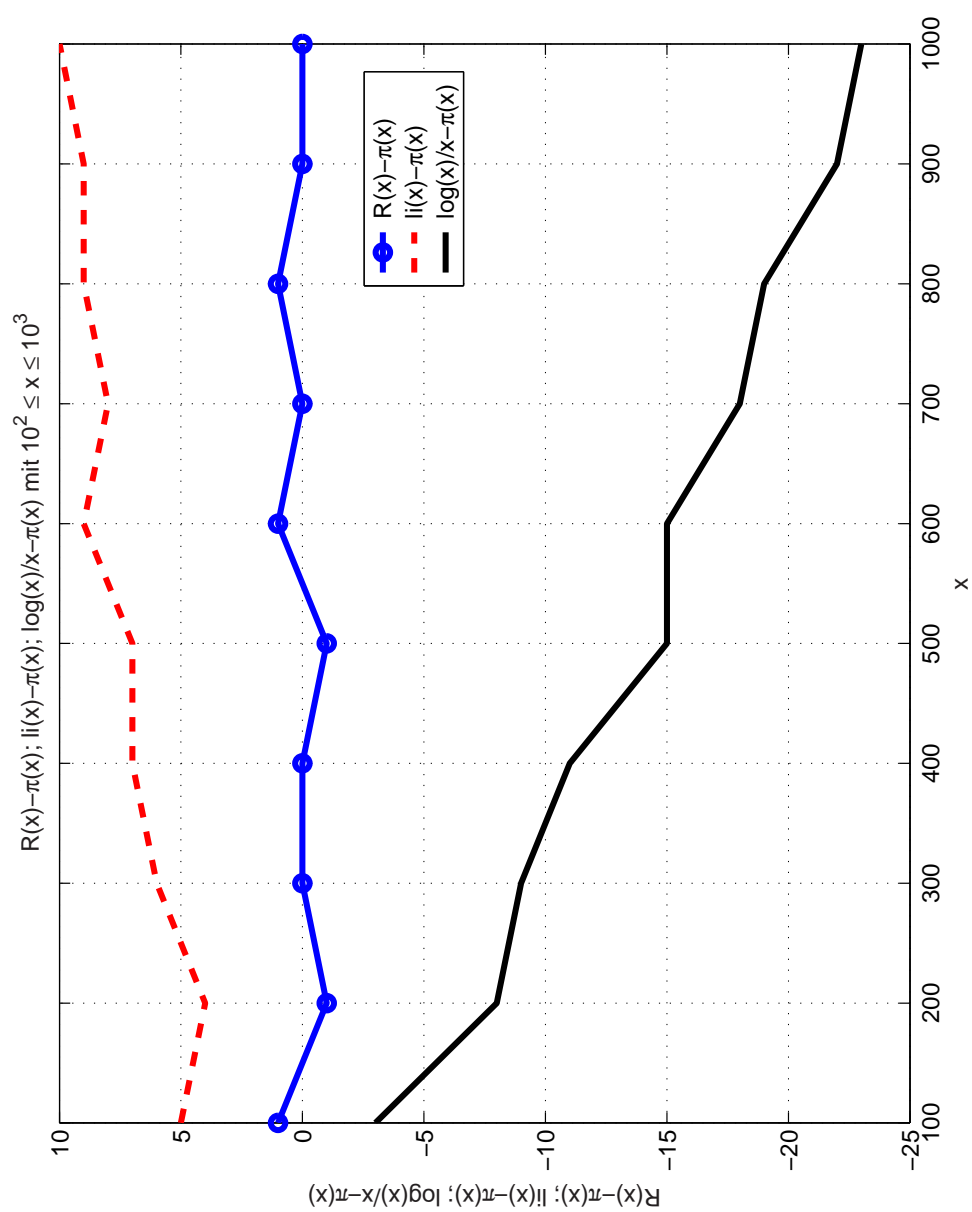


Abbildung F.2: Graphen von $R(x) - \pi(x)$; $li(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ für $10^2 \leq x \leq 10^3$

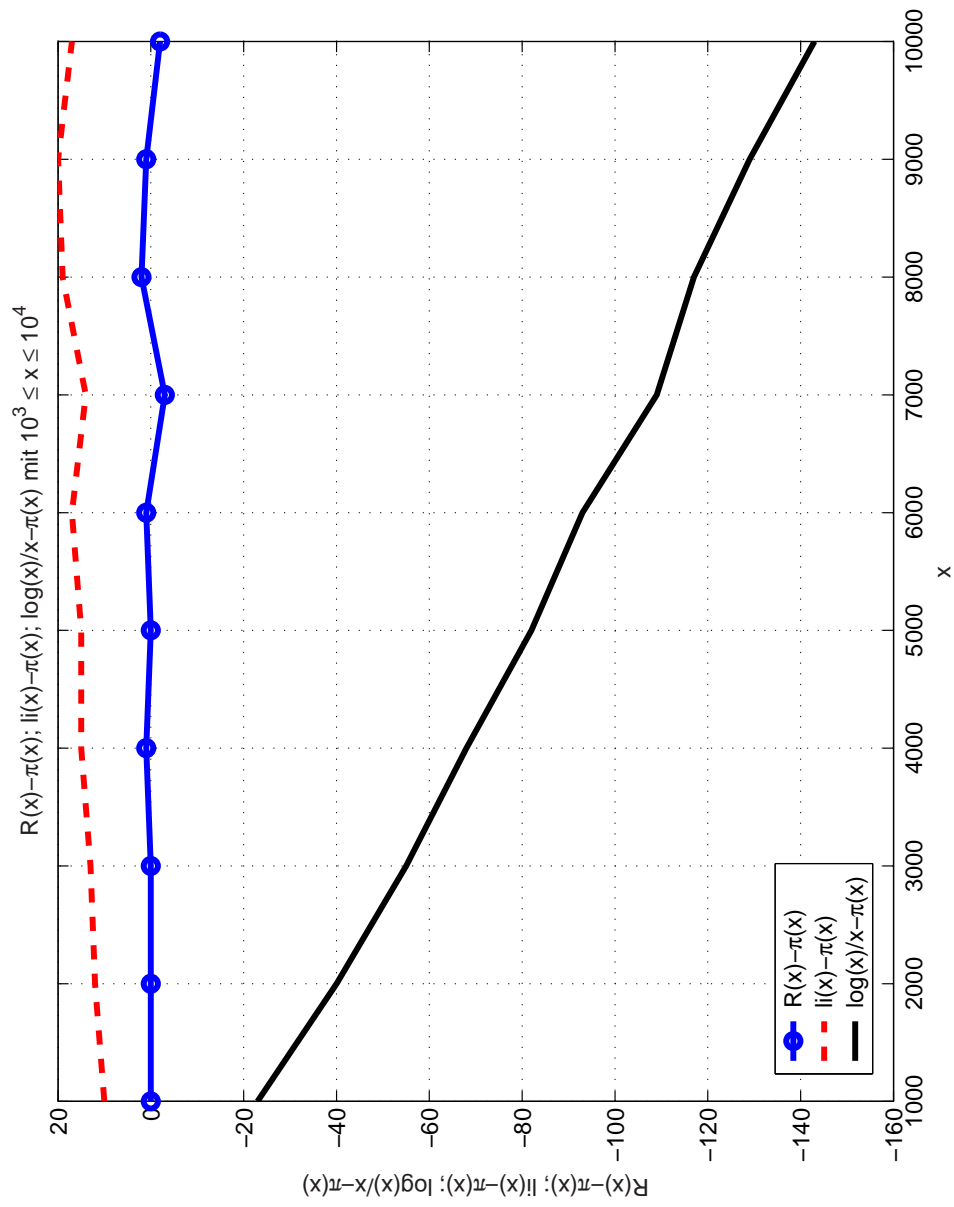


Abbildung F.3: Graphen von $R(x) - \pi(x)$; $li(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ für $10^3 \leq x \leq 10^4$

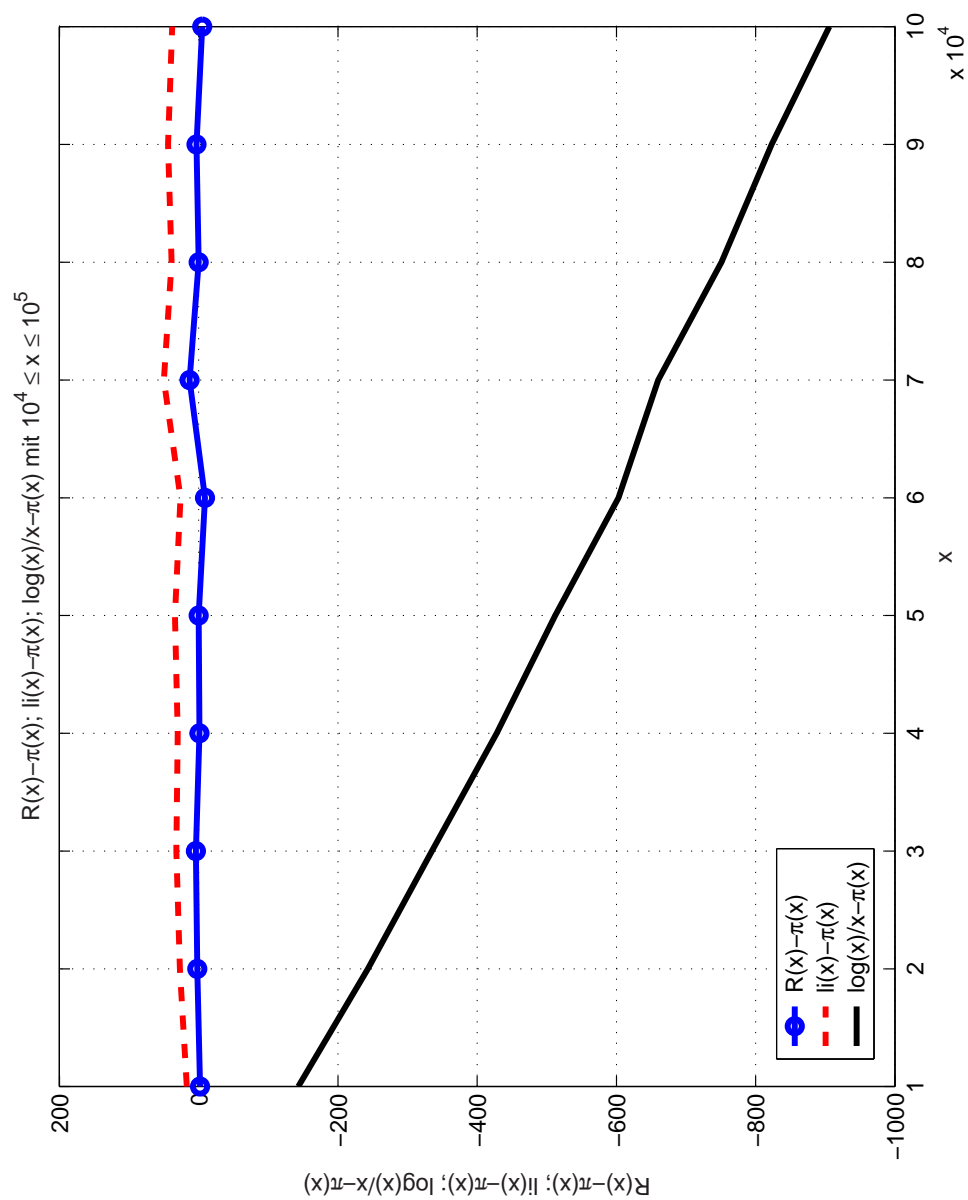


Abbildung F 4: Graphen von $R(x) - \pi(x)$; $li(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ für $10^4 \leq x \leq 10^5$

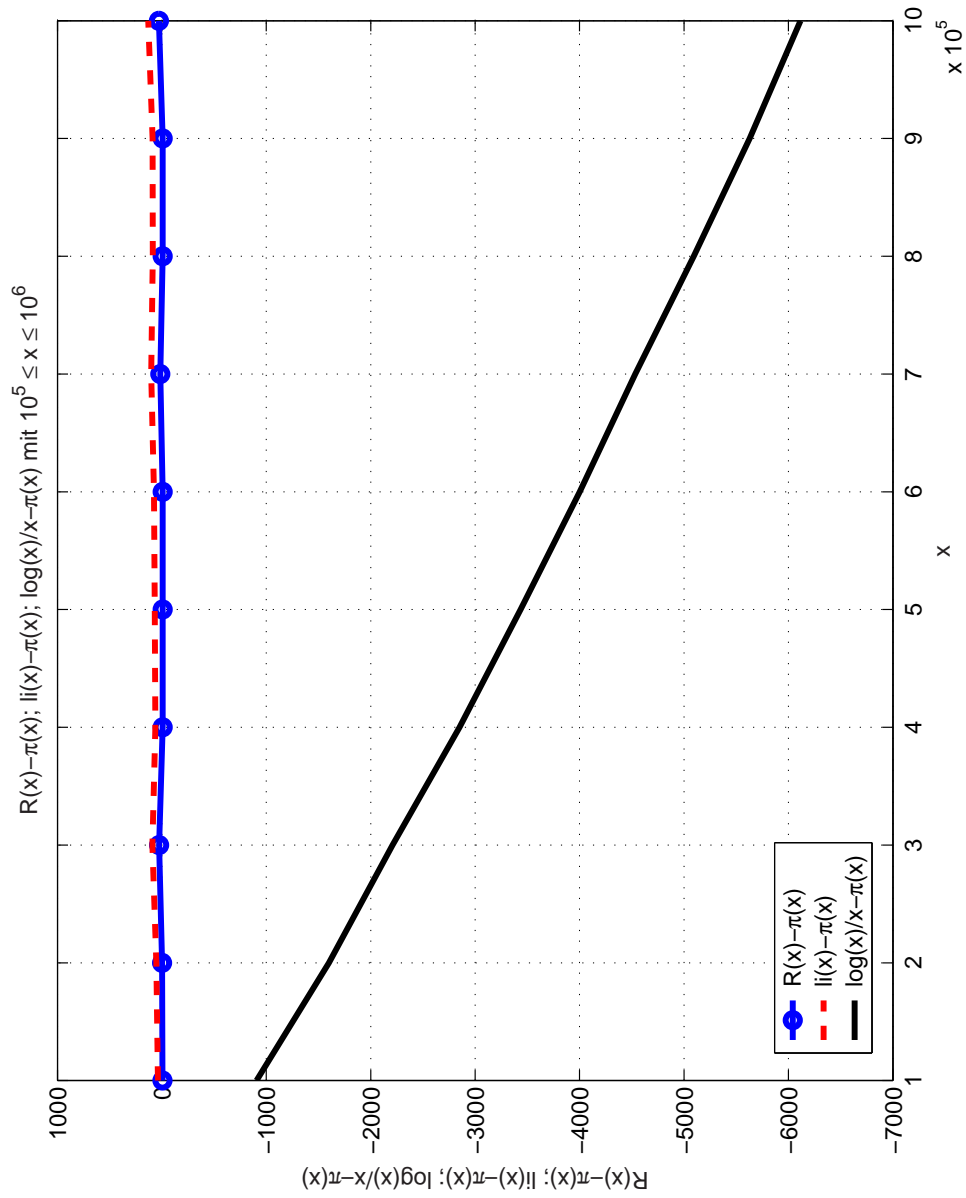


Abbildung F.5: Graphen von $R(x) - \pi(x)$; $li(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ für $10^5 \leq x \leq 10^6$

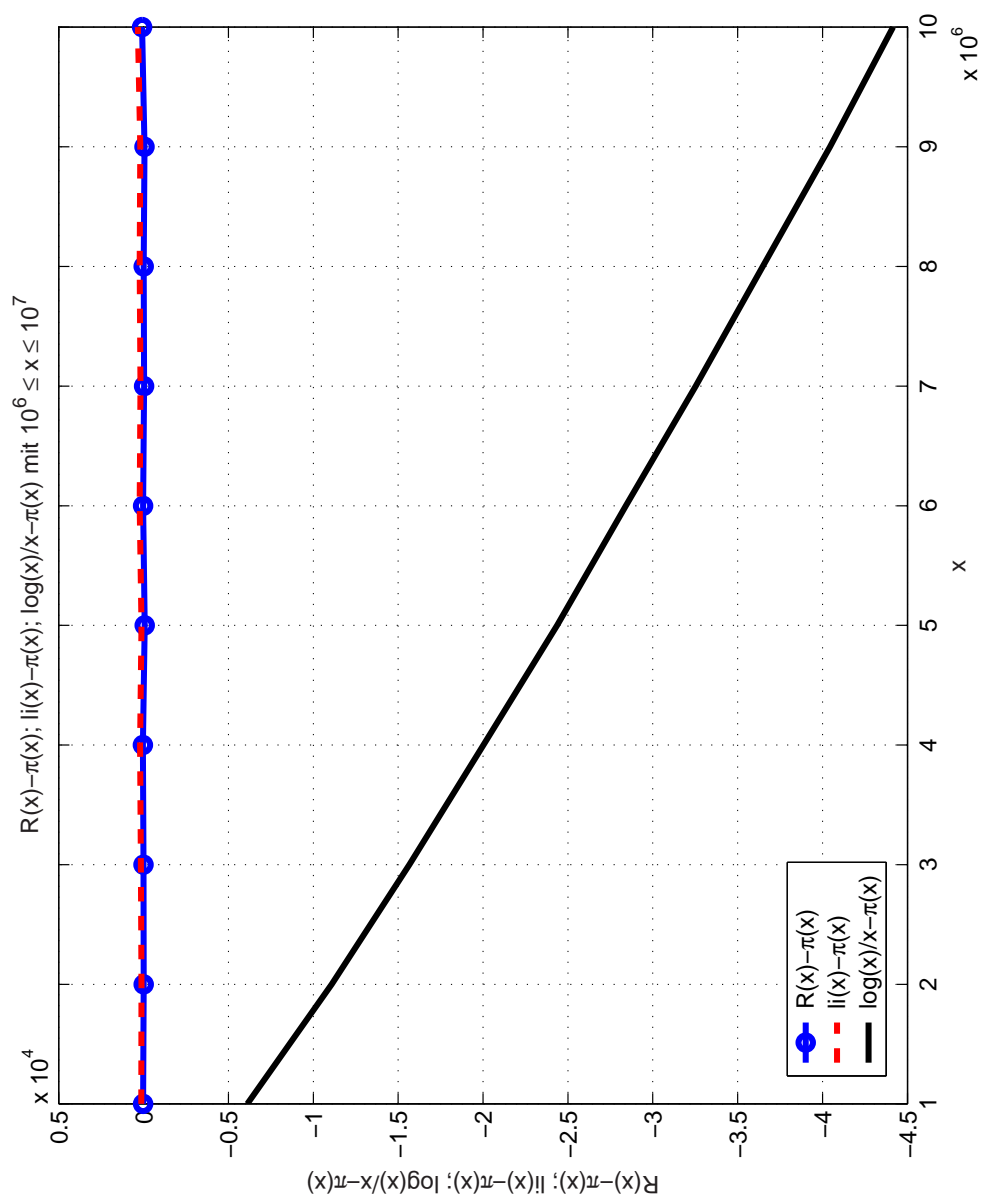


Abbildung F.6: Graphen von $R(x) - \pi(x)$; $\text{li}(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ für $10^6 \leq x \leq 10^7$

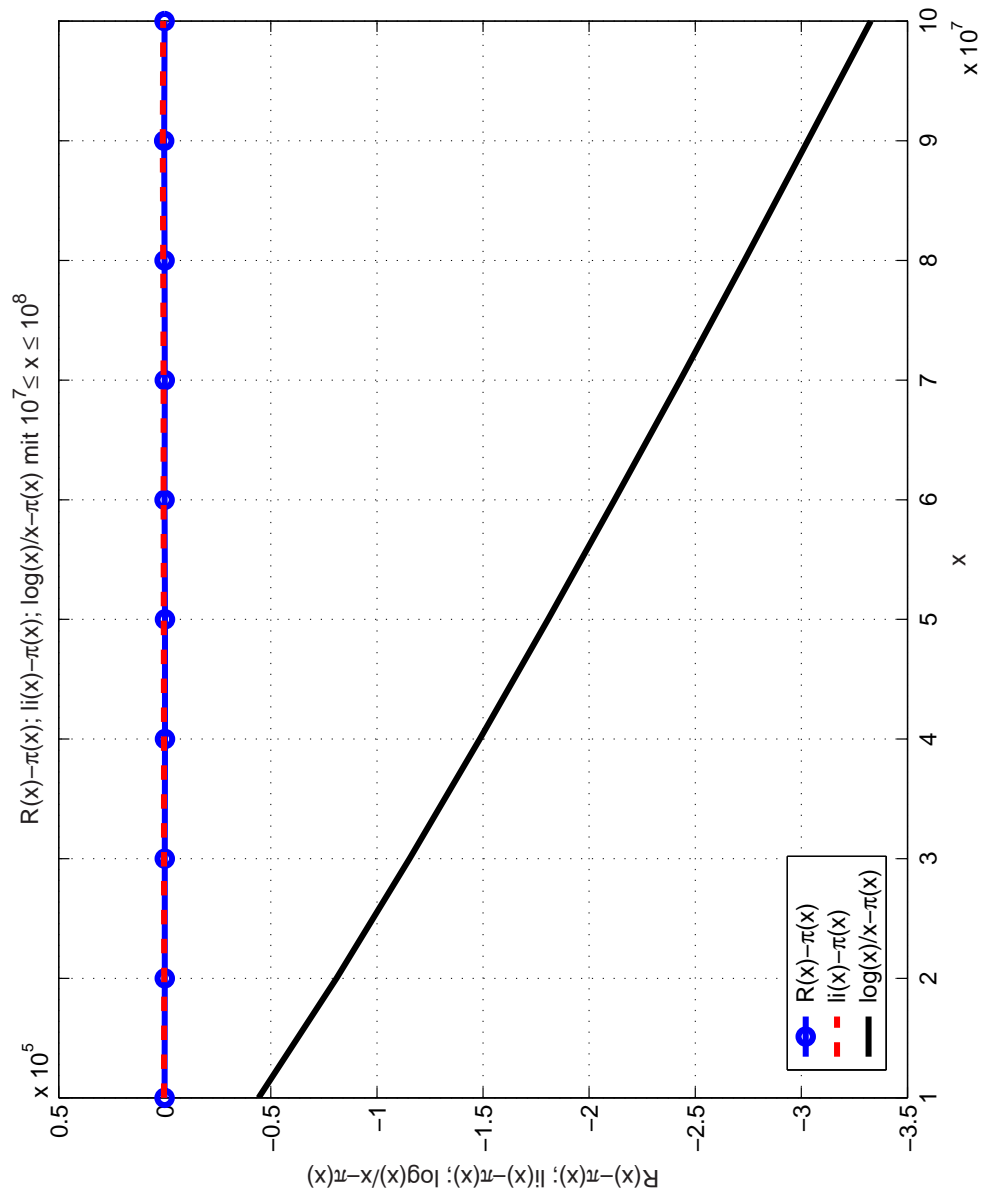


Abbildung F.7: Graphen von $R(x) - \pi(x)$; $li(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ für $10^7 \leq x \leq 10^8$

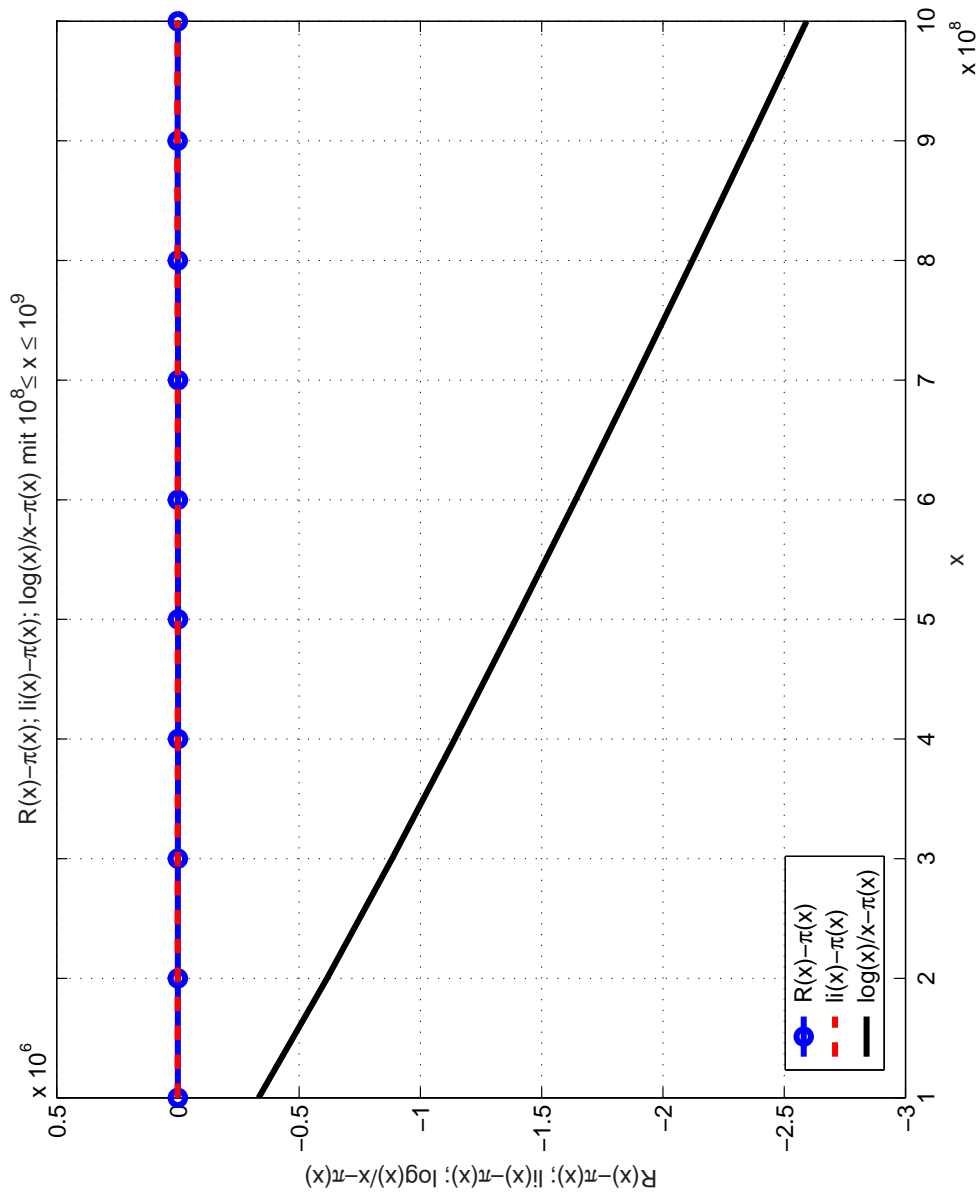


Abbildung F.8: Graphen von $R(x) - \pi(x)$; $li(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ für $10^8 \leq x \leq 10^9$

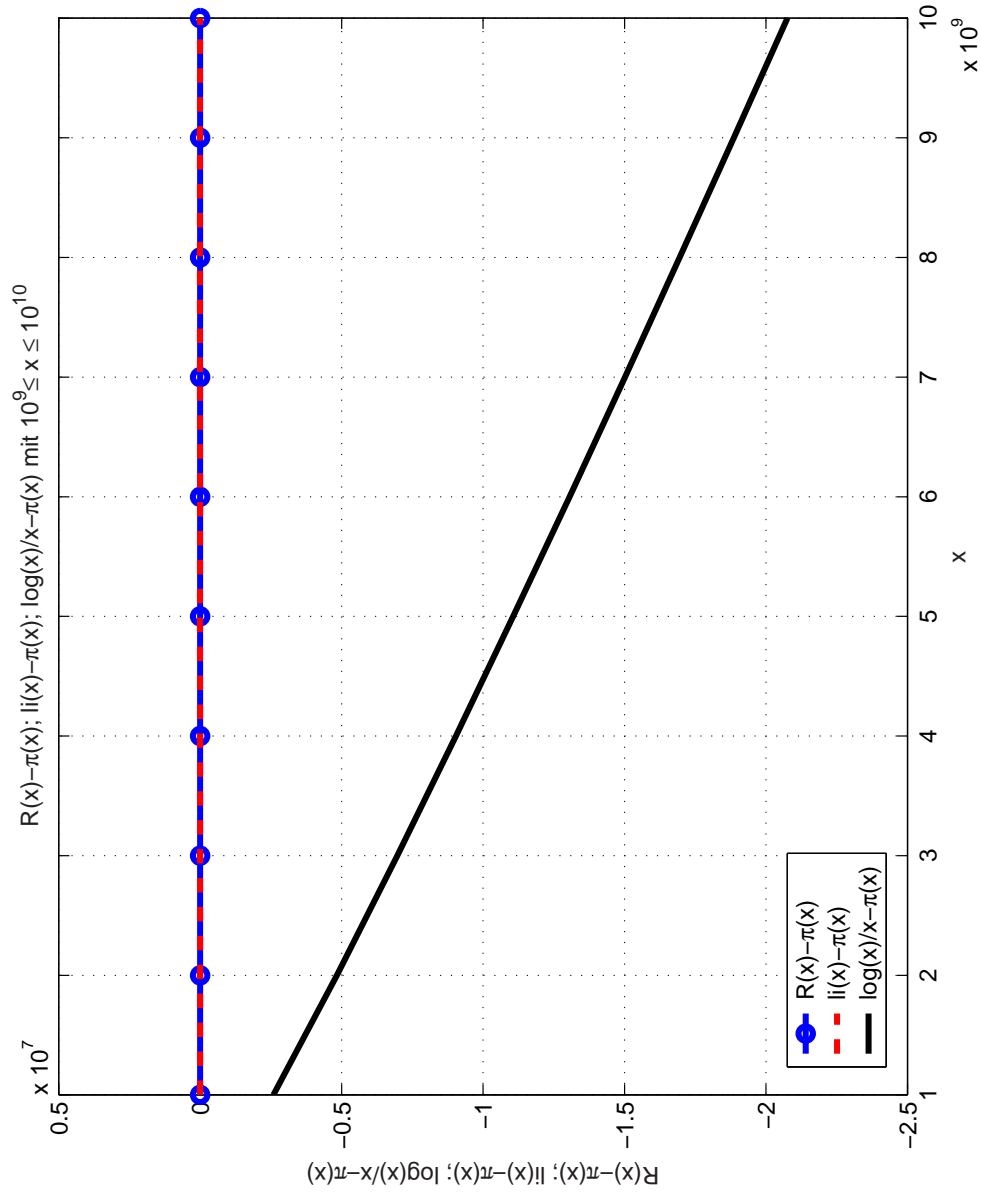


Abbildung F.9: Graphen von $R(x) - \pi(x)$; $li(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ für $10^9 \leq x \leq 10^{10}$

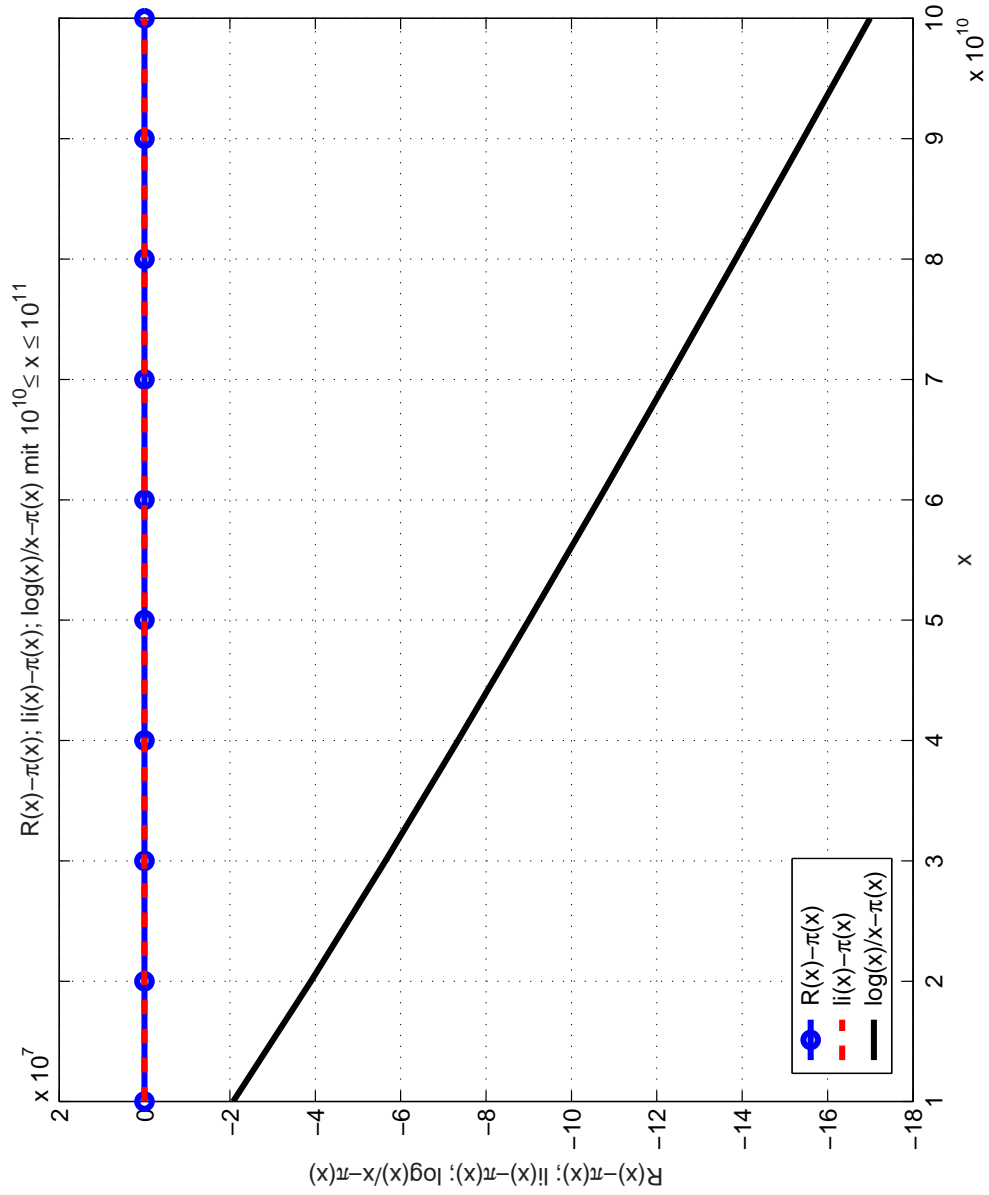


Abbildung F.10: Graphen von $R(x) - \pi(x)$; $li(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ für $10^{10} \leq x \leq 10^{11}$

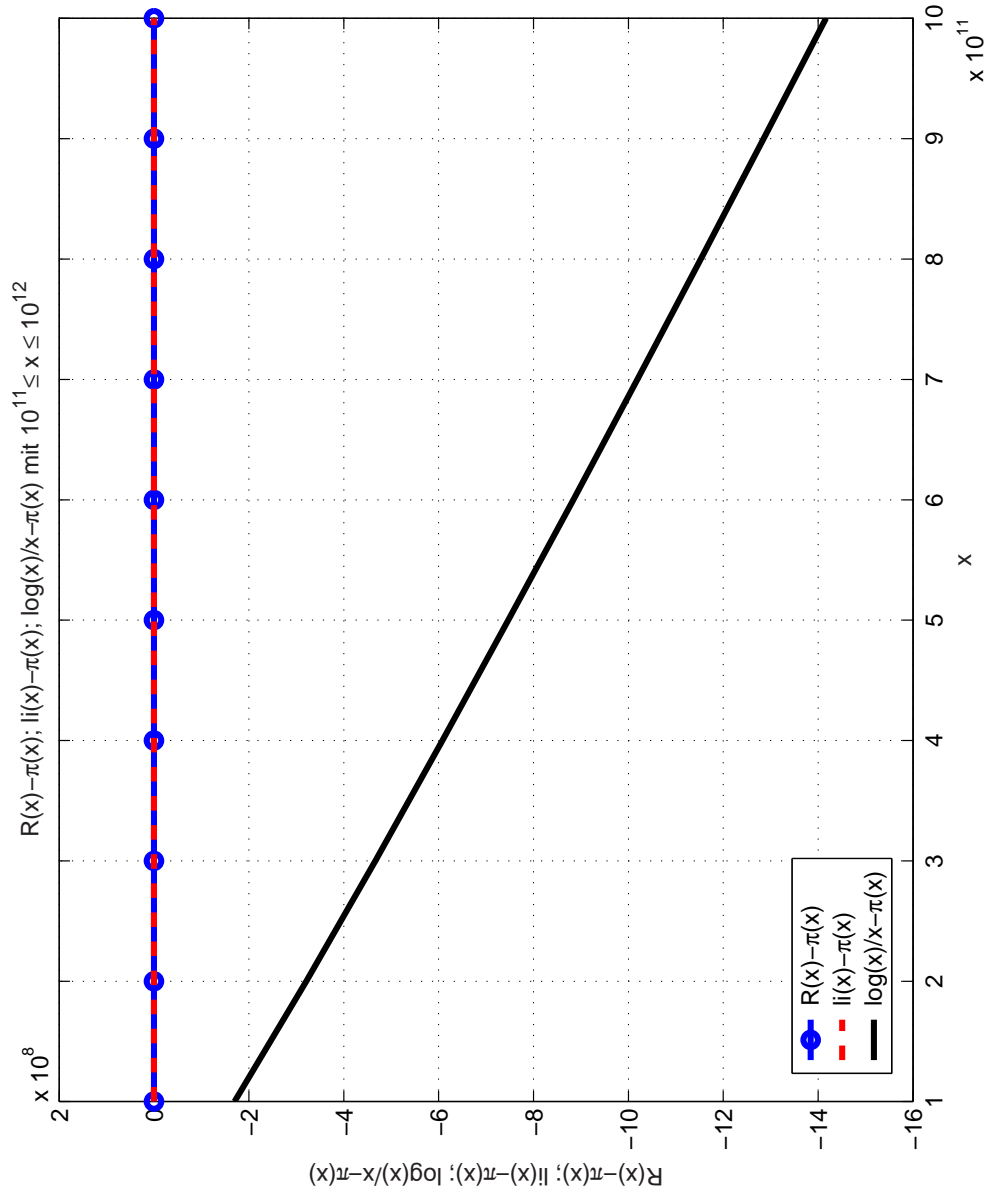


Abbildung F.11: Graphen von $R(x) - \pi(x)$; $li(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ für $10^{11} \leq x \leq 10^{12}$

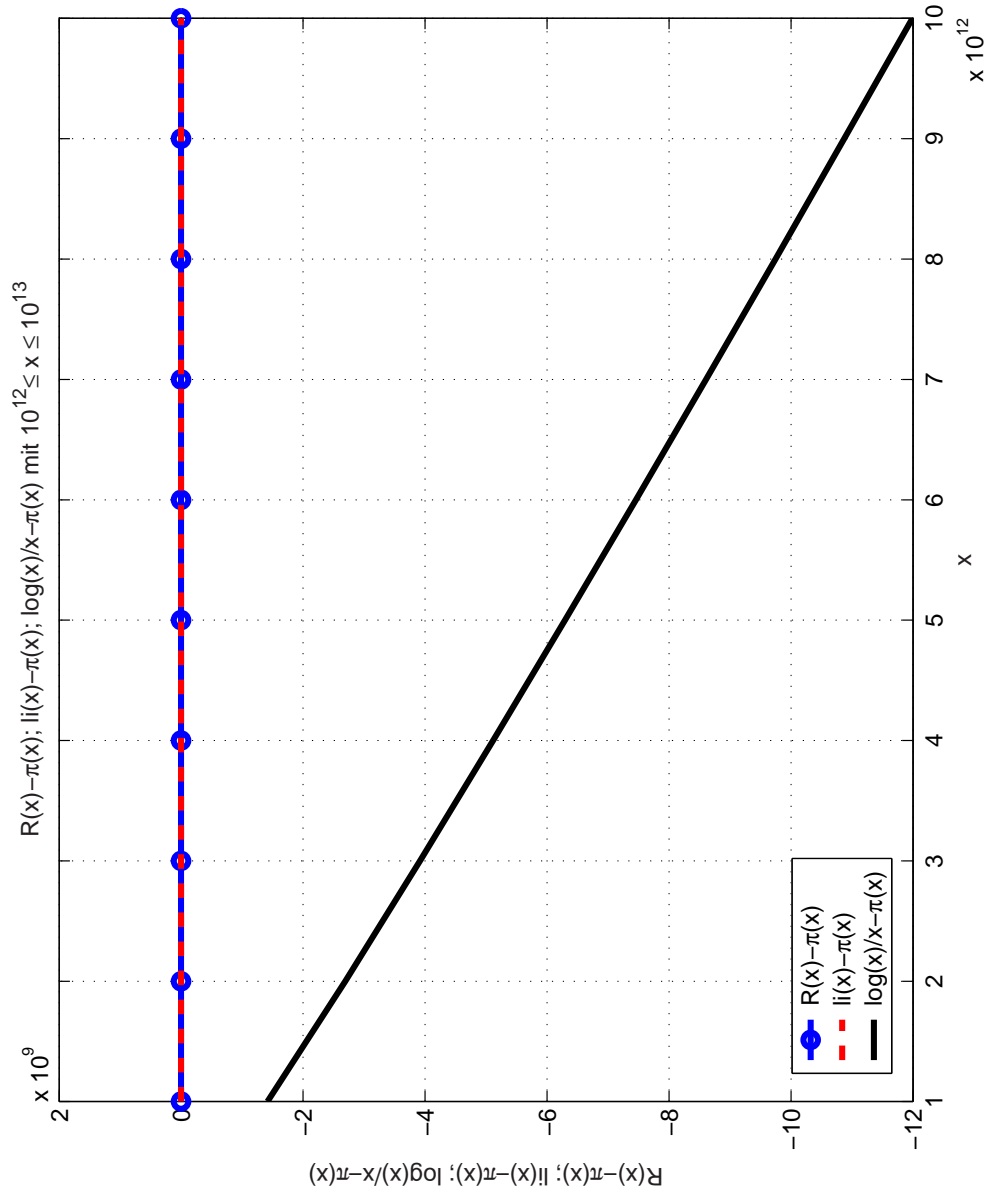


Abbildung F.12: Graphen von $R(x) - \pi(x)$; $li(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ für $10^{12} \leq x \leq 10^{13}$

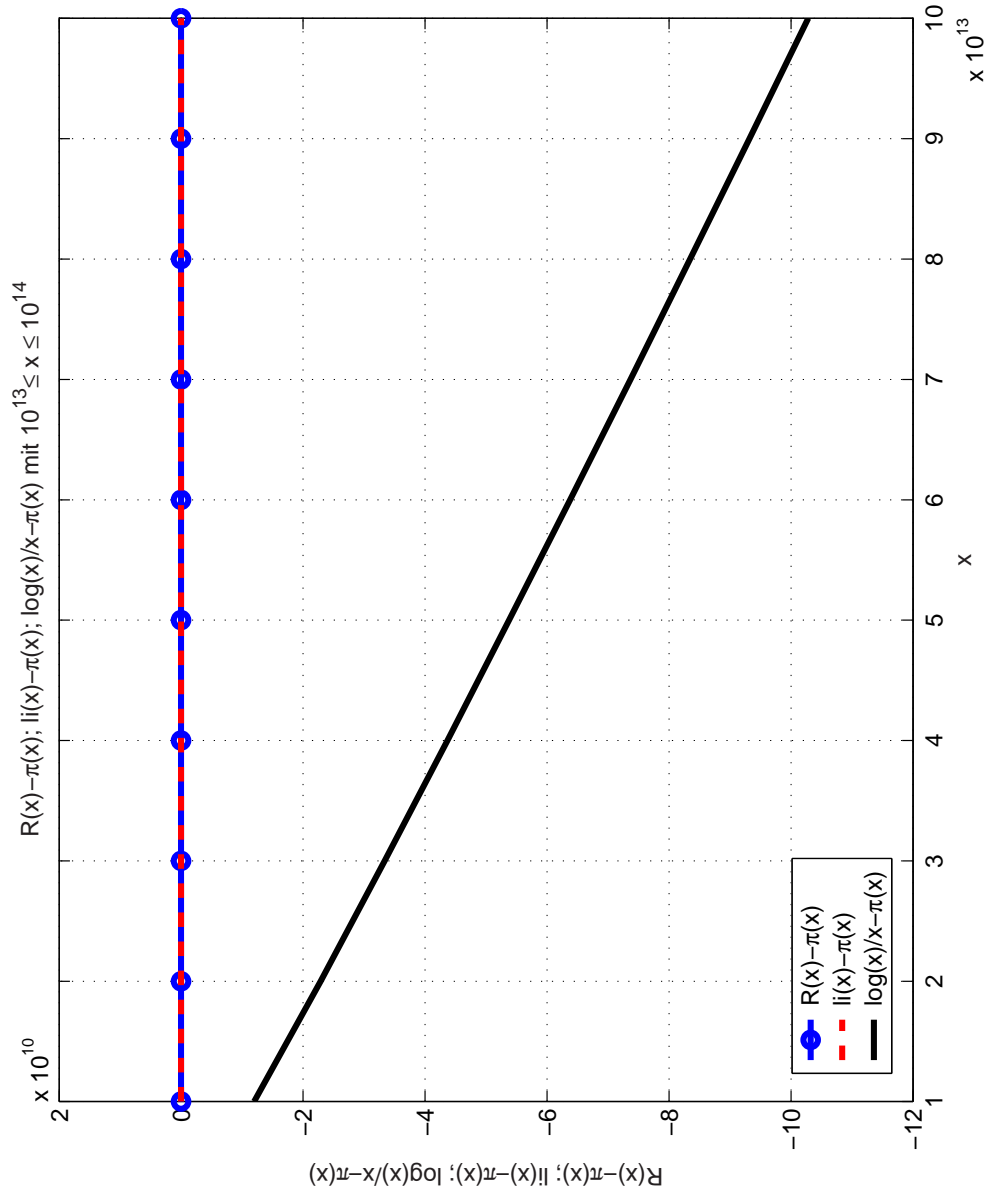


Abbildung F.13: Graphen von $R(x) - \pi(x)$; $li(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ für $10^{13} \leq x \leq 10^{14}$

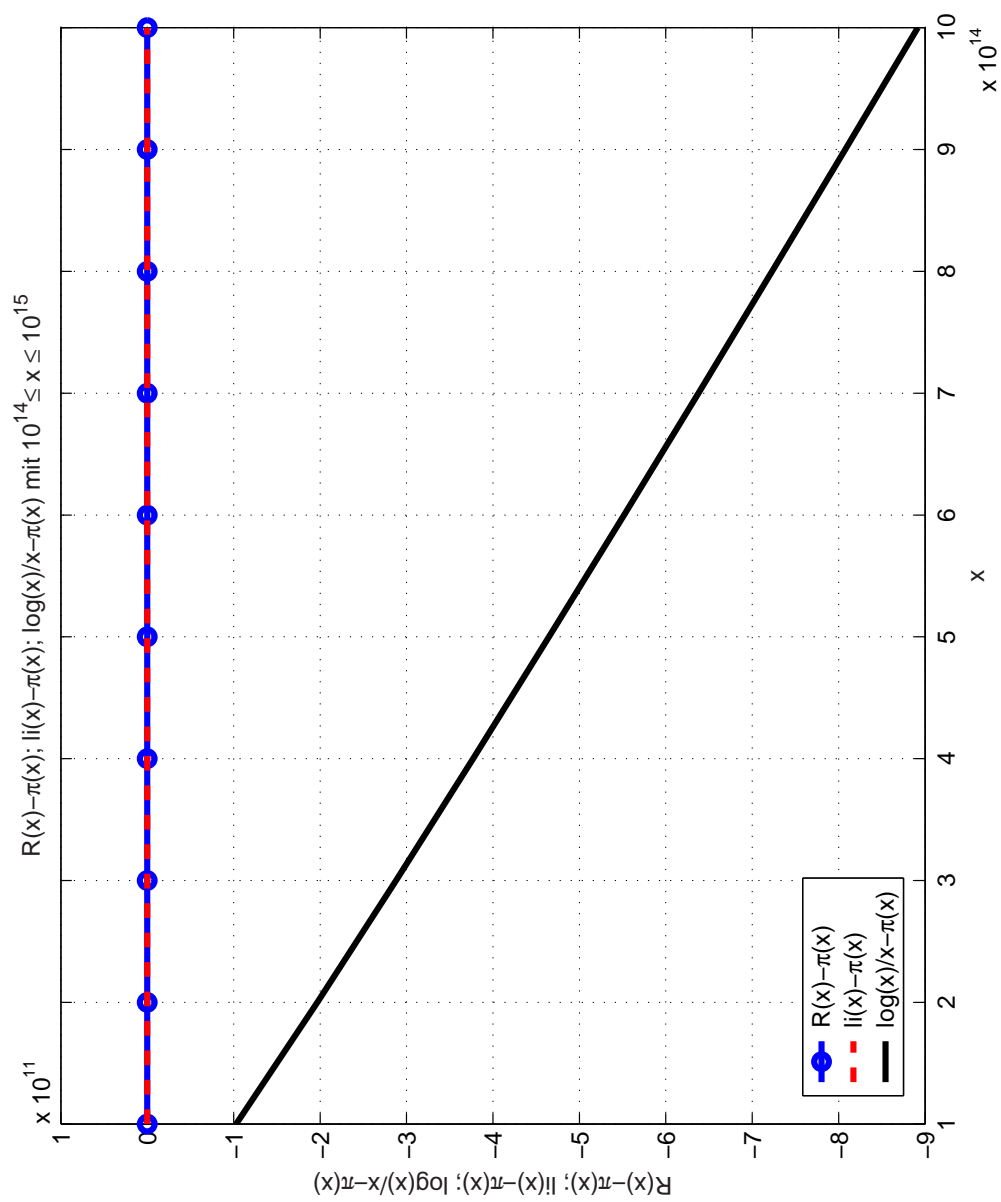


Abbildung F.14: Graphen von $R(x) - \pi(x)$; $\text{li}(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ für $10^{14} \leq x \leq 10^{15}$

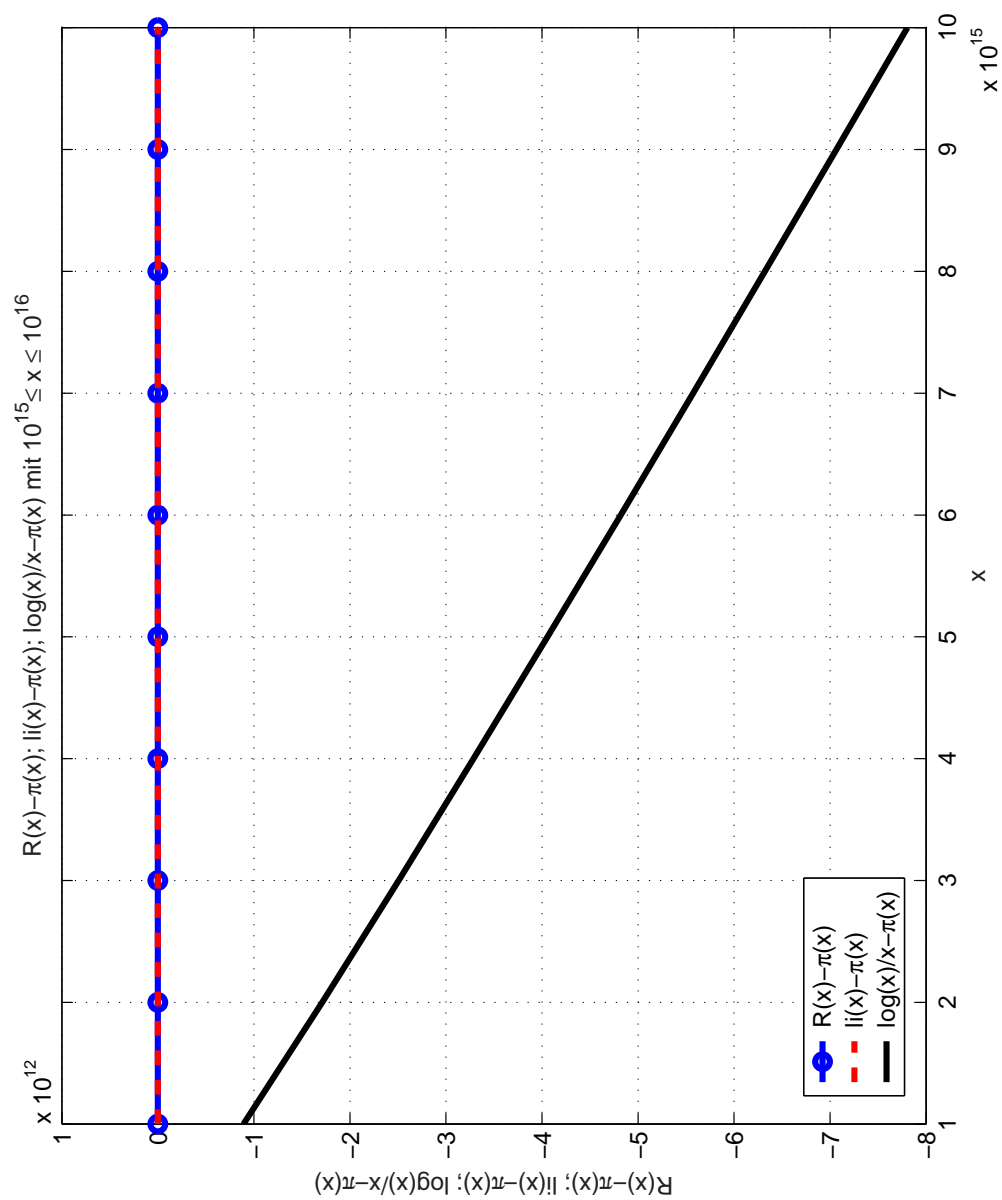


Abbildung F.15: Graphen von $R(x) - \pi(x)$; $li(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ für $10^{15} \leq x \leq 10^{16}$

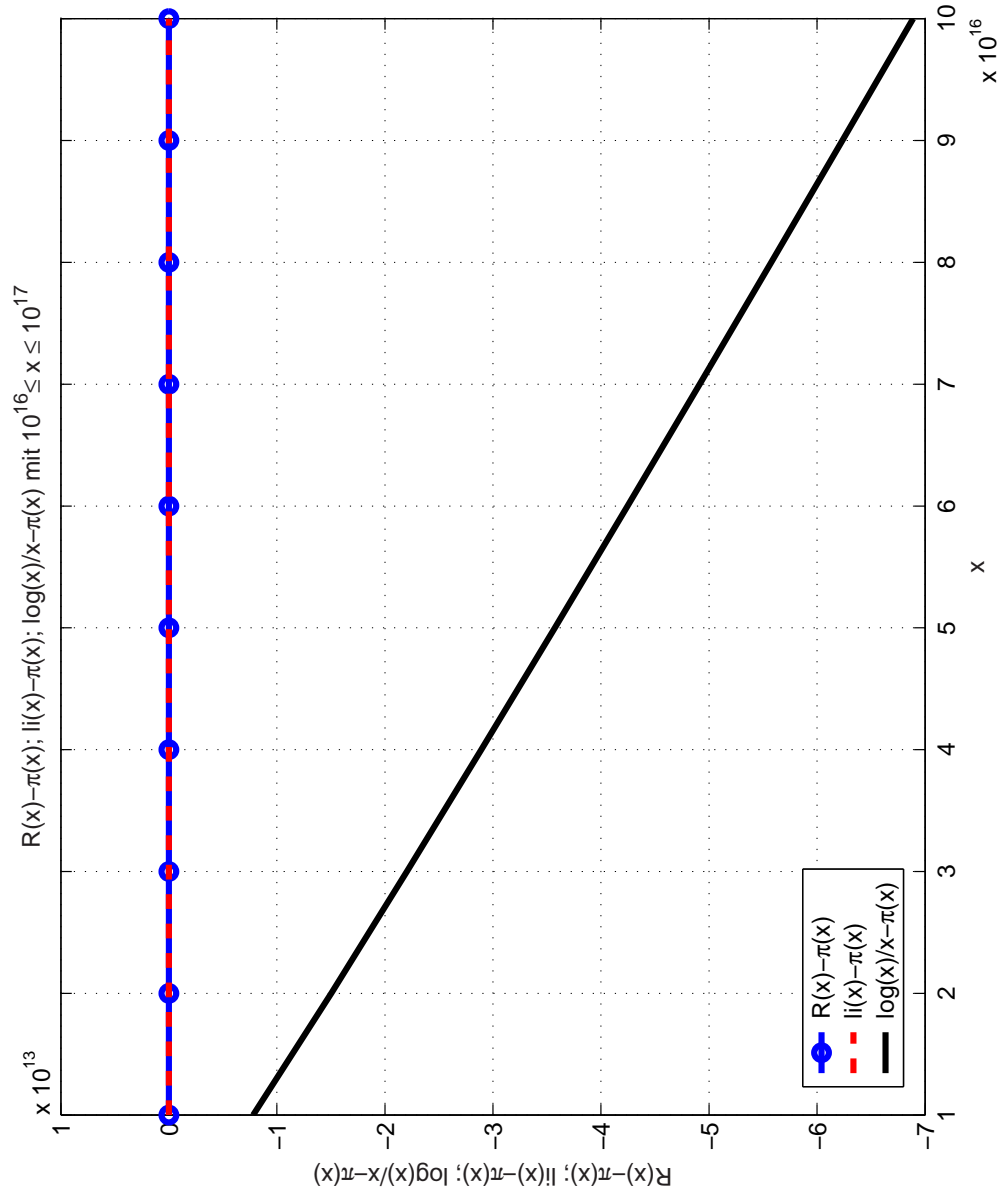


Abbildung F.16: Graphen von $R(x) - \pi(x)$; $li(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ für $10^{16} \leq x \leq 10^{17}$

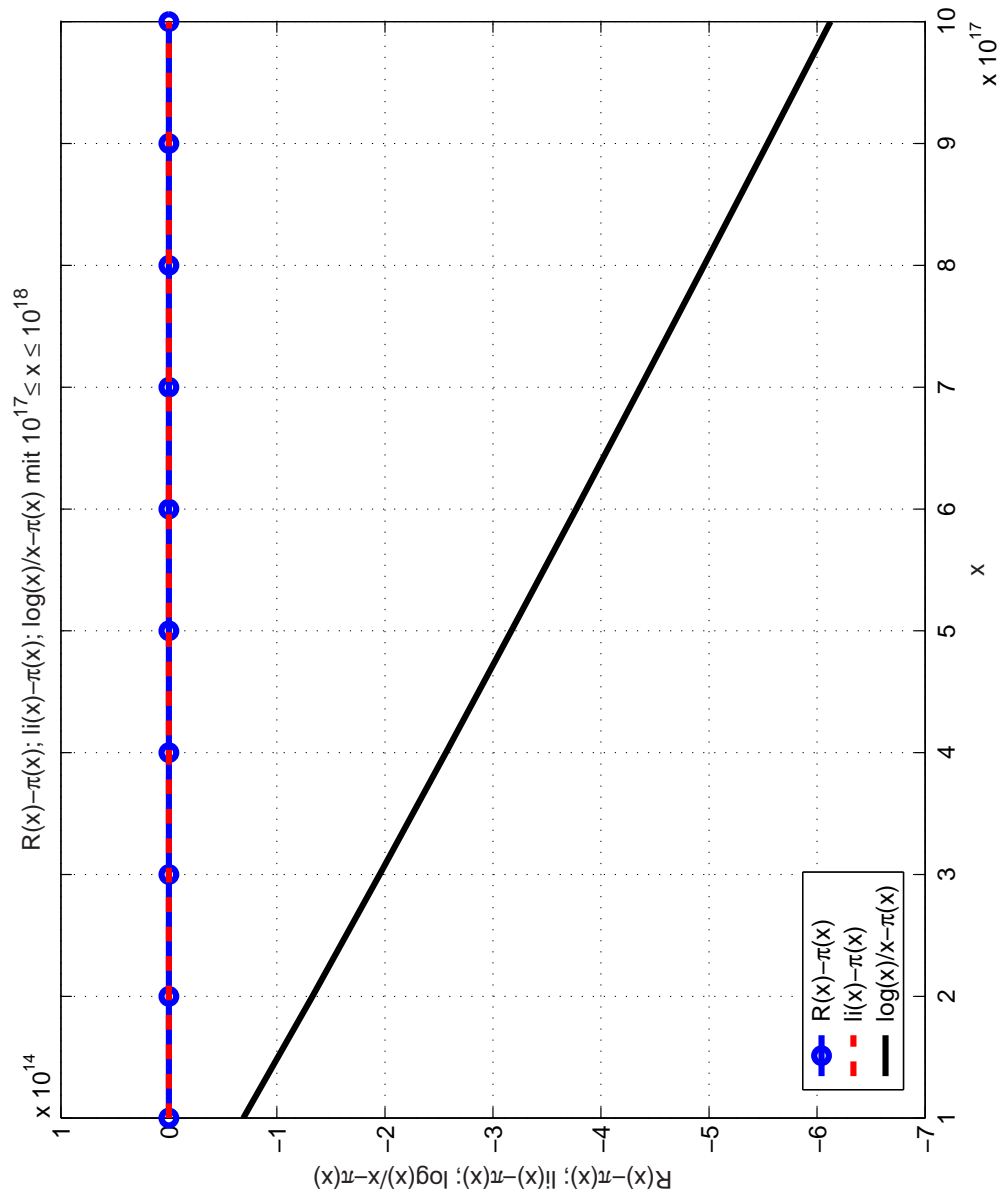


Abbildung F.17: Graphen von $R(x) - \pi(x)$; $li(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ für $10^{17} \leq x \leq 10^{18}$

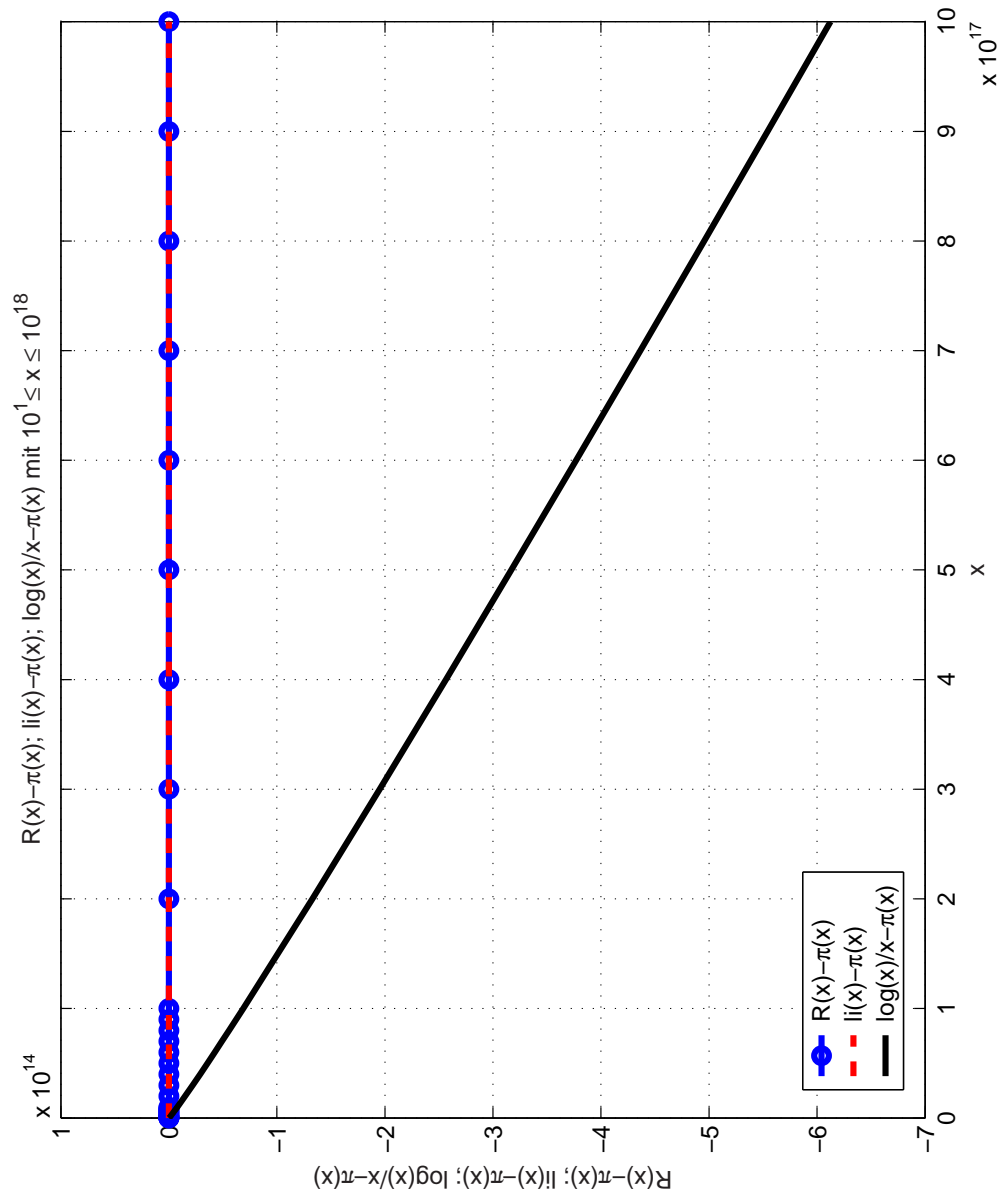


Abbildung F.18: GesamtGraphen von $R(x) - \pi(x)$; $li(x) - \pi(x)$ und $\frac{x}{\log(x)} - \pi(x)$ für $10^1 \leq x \leq 10^{18}$

Literaturverzeichnis

- [1] A. S. Sobirov A. F. Lavrik, *On the remainder term in the elementary proof of the prime number theorem*, Sov. Math., Dokl. (1973), no. 14, 1063–1066.
- [2] T. M. Apostol, *Introduction to analytic number theory*, Springer Verlag, 1976.
- [3] Bays and Hudson, *A new bound for the smallest x with $\pi(x) > li(x)$* , May 1999,
[http://www.ams.org/mcom/2000-69-231](http://www.ams.org/mcom/2000-69-231/S0025-5718-99-01104-7/home.html)
[/S0025-5718-99-01104-7/home.html](http://www.ams.org/mcom/2000-69-231/S0025-5718-99-01104-7/home.html).
- [4] ———, *A new bound for the smallest x with $\pi(x) > li(x)$* ,
[http://www.ams.org/jourcgi/jour-pbprocess?fn=110](http://www.ams.org/jourcgi/jour-pbprocess?fn=110&arg1=S0025-5718-99-01105-9&u=/mcom/0000-000-00)
[&arg1=S0025-5718-99-01105-9&u=/mcom/0000-000-00](http://www.ams.org/jourcgi/jour-pbprocess?fn=110&arg1=S0025-5718-99-01105-9&u=/mcom/0000-000-00), March 1999.
- [5] J. Bohman, *On the number of primes less than a given limit*, Nordisk Tidskrift för Informationsbehandling (BIT) (1972), no. 12, 576–577.
- [6] E. Bombieri, *Maggiorazione del resto nel "Primzahlsatz" col metodo di Erdoes–Selberg (Italian)*, Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett., Rend., Sci. Mat. Fis. Chim. Geol., Ser. **A** **96** (1962), 343–350.

- [7] ———, *Sulle formule di a. Selberg generalizzate per classi di funzione aritmetiche e le applicazioni al problema del resto nel "Primzahlsatz"*, Riv. Mat. Univ. Parma **2** (1962), no. 3, 393–440.
- [8] R. Breusch, *An elementary proof of the prime number theorem with remainder term*, Pacific J. Math **10** (1960), 487–497.
- [9] P. Bundschuh, *Einführung in die Zahlentheorie*, Springer, 1996.
- [10] C. K. Caldwell, *On the primality of $n! \pm 1$ and $2 \times 3 \times 5 \times \cdots \times p \pm 1$* , Math. Comput. **64** (1995), no. 210, 889–890.
- [11] P. L. Chebychev, *Mémoire sur les nombres premiers*, J. Math. Pures et appl. (1952), no. 17, 366–390.
- [12] N. G. Tschudakov (Cudakov), *On zeros of the function $\zeta(s)$ (in Russian)*, C. R. Acad. Sci. U.R.S.S. (1936), no. 1(x), 201–204.
- [13] H. Davenport, *Multiplicative number theory*, Markham Publishing Company, 1967.
- [14] C. de la Vallée Poussin, *Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers; partie i: la fonction $\zeta(s)$ de riemann et les nombres premiers en général*, Ann. Soc. Sci. Bruxelles (1896), no. 20, 183–256.
- [15] ———, *Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et le nombre des nombres premiers, inférieurs à une limite donnée*, Mémoires Couronnés et autres Mémoires, Acad. Belgique **59** ((1899-1900), no. 1.
- [16] H. G. Diamond, *Elementary methods in the study of distribution of prime numbers*, Bulletin (N.S) of the Amer. Math. Soc. **7** (1982), 553–589.
- [17] J. Dieudonné, *Geschichte der Mathematik 1700–1900*, Vieweg, 1985.

- [18] A. Dusumbetov, *Elementarer Beweis des asymptotischen Gesetzes der Primzahlverteilung in einer arithmetischen Progression (Russian)*, Izv. Akad. Nauk UzSSR, Ser. Fiz.-Mat (1963), 5–12.
- [19] P. Erdős, *On a new method in elementary number theory which leads to an elementary proof of the prime number theorem*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA (1949), no. 35, 374–384.
- [20] Euklid, *Elementa, Bd. 2. Opera omnia (übersetzt und herausgegeben von J. Heiberg und H. Menge)*, vol. 2, Teubner, Leipzig, 1884.
- [21] L. Euler, *Varia observationes circa series infinitas*, Commun. Acad. Sci. Petropolitanae (1737), 222–236.
- [22] T. Forbes, *A large pair of twin primes*, Math. Comput. **66** (1997), no. 217, 451–455.
- [23] J. Hadamard, *Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques*, Bul. Soc. Math. France (1896), no. 24, 199–220.
- [24] G. H. Hardy, *Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann*, C. R. Acad. Sci. Paris (1914), no. 158, 1012–1014.
- [25] L. K. Hua, *Die Abschätzung von Exponentialsummen und ihre Anwendung in der Zahlentheorie*, Leipzig, 1959.
- [26] A. E. Ingham, *The distribution of prime numbers*, Cambridge, 1932.
- [27] ———, *On Wiener's method in Tauberian theorems*, Proc. London Math. Soc. **II** (1935), no. 38, 458–480.
- [28] A. Ivić, *The Riemann zeta-funktion*, John Wiley, 1985.
- [29] K. Jänich, *Einführung in die Funktionentheorie*, Springer, 1980.

- [30] K. H. Indlekofer; A. Járαι, *Largest known twin primes*, Math. Comput. **65** (1996), no. 213, 427–428.
- [31] N. M. Korobov, *Abschätzungen trigonometrischer Summen und ihre Anwendungen. (Russian)*, Usp. Mat. Nauk 13 **82** (1958), no. 4, 185–192.
- [32] ———, *On zeroes of the Zetafunction. (russian)*, Dokl. Akad. Nauk SSSR (1958), no. 118, 431–432.
- [33] P. Kuhn, *Eine Verbesserung des Restgliedes beim elementaren Beweis des Primzahlsatzes*, Math. Scandinav (1955), no. 3, 75–89.
- [34] E. Landau, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, Teubner (Nachdruck: Chelsea, NewYork, 1974), Leipzig–Berlin, 1909.
- [35] A. M. Legendre, *Théorie des nombres, 2 bände*, Paris (Didot), 1830.
- [36] R. S. Lehman, *On the difference $\pi(x) - li(x)$* , Acta Arith. (1966), no. 11, 397–410.
- [37] D. H. Lehmer, *On the exact number of primes less than a given limit.*, Illinois J. Math (1959), no. 3, 381–388.
- [38] W. Fischer; I. Lieb, *Ausgewählte Kapitel aus der Funktionstheorie*, Vieweg, 1988.
- [39] J. E. Littlewood, *Sur la distribution des nombres premiers*, C. R. Paris **158** (1914), 1869–1872.
- [40] ———, *Researches in the theory of Riemann's ζ -function*, Proc. London Math. Soc. **2** (1922), no. 20, XXII–XXVIII.
- [41] D. C. Mapes, *Fast method for computing the number of primes less than a given limit*, Math. Comput (1963), no. 17, 179–185.

- [42] E. D. F. Meissel, *Über die Bestimmung der Menge der Primzahlen innerhalb gegebener Grenzen*, Math. Annalen (1870), no. 2, 636–642.
- [43] ———, *Berechnung der Menge von Primzahlen, welche innerhalb der ersten Milliarde natürlicher Zahlen vorkommen*, Math. Annalen (1885), no. 25, 251–257.
- [44] D. J. Newman, *Simple analytic proof of the prime number theorem*, American Math. Monthly (1980), no. 87, 693–696.
- [45] J. C. Lagarias; A. M. Odlyzko, *Computing $\pi(x)$: An analytic method*, Journ. of Algorithms (1987), no. 8, 173–191.
- [46] J. C. Lagarias; V. S. Miller; A. M. Odlyzko, *Computing $\pi(x)$: the Meissel–Lehmer Method*, Math. Comp (1985), no. 44, 537–560.
- [47] W. Jurkat; A. Peyerimhoff, *A constructive approach to Kronecker approximations and its application to the Mertens conjecture*, J. reine angew. Math. (1976), no. 286/287, 322–340.
- [48] J. Pintz, *On the remainder term of the prime number formula (iv): sign changes of $\pi(x) - li(x)$* , Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica (1978), no. 13, 29–42.
- [49] ———, *On Legendre’s prime number formula*, Amer. Math. Monthly, (1980), no. 87, 733–735.
- [50] J. Young; A. Potler, *First occurrence prime gaps*, Math. Comp. (1989), no. 52, 221–224.
- [51] K. Pracher, *Primzahlverteilung*, Springer, 1957.
- [52] P. Pritchard, *A sublinear additive sieve for finding prime numbers*, Commun. ACM (1981), no. 24, 18–23.

- [53] ———, *Fast compact prime number sieves (among others)*., J. Algorithms (1983), no. 4, 332–344.
- [54] D. Redmond, *Number theory: an introduction*, Marcel Dekker, New York, 1996.
- [55] R. Remmert, *Theory of complex functions*, Springer, 1989.
- [56] P. Ribenboim, *The Book of prime number records*, Springer Verlag, 1989.
- [57] ———, *The Book of prime number records*, Springer Verlag, 1996.
- [58] A. M. Odlyzko; H. J. J. Te Riele, *Disproof of Mertens Conjecture*, J. Reine Angew. Math. (1985), no. 357, 138–160.
- [59] B. Riemann, *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen GröÙe*, Monatsberichte d. Berliner Akademie Wiss (1859), 671–680.
- [60] H. Riesel, *Prime number and computer methods for factorization*, Birkhäuser, 1994.
- [61] M. Deléglise; J. Riva, *Computing $\pi(x)$: The Meissel, Lehmer, Lagarias, Miller, Odlyzko method*, Math. Comput **65** (1996), no. 213, 235–245.
- [62] J. W. Sander, *Die Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion*, Math. Semesterbericht **39** (1992), no. 2, 185–194.
- [63] H. Scheid, *Zahlentheorie*, B. I.- Wissenschaftsverlag, 1991.
- [64] J. B. Rosser; L. Schoenfeld, *Sharper bounds for the Chebyshev functions $\theta(x)$ and $\psi(x)$ Part. ii. Math. Comp. 30 (1976), 337–360 (Part ii wurde nur von L. Schoenfeld verfasst.)*, Math. Comp. (1976), no. 29, 243–269.
- [65] J. Rosser; L. Schoenfeld, *Approximate formulas for some functions of prime numbers*, Illinois J. Math (1962), no. 6, 64–94.

- [66] W. Schwarz, *Der Primzahlsatz*, Überblicke Mathematik **Band 1** (1968), no. 161/161a, 35–61.
- [67] ———, *Einführung in Methoden und Ergebnisse der Primzahltheorie*, B. I.- Wissenschaftsverlag, 1969.
- [68] ———, *Einführung in die Siebmethoden der analytischen Zahlentheorie (vergriffen)*, B. I.- Wissenschaftsverlag, 1974.
- [69] ———, *Über einige Probleme aus der Theorie der Primzahlen*, Band XXI (1985), no. 2, 61–119.
- [70] ———, *Colloquium The Development of Mathematics from 1900 to 1950*, Some Remarks on the History of the Prime Number Theorem from 1896 to 1960 (1992).
- [71] A. Selberg, *An elementary method of the prime number theorem*, Ann. of Math **2** (1949), no. 50, 305–313.
- [72] S. Skewes, *On the difference $\pi(x) - li(x)$, (i)*, J. London Math. Soc. (1933), no. 8, 277–283.
- [73] ———, *On the difference $\pi(x) - li(x)$, (ii)*, Proc. London Math. Soc. **III** (1955), no. 5, 48–70.
- [74] H. G. Diamond; J. Steinig, *An elementary proof of the prime number theorem with a remainder term*, Invent. Math. **11** (1970), 199–258.
- [75] J. J. Sylvester, *On Tchebycheff's theorem of the totality of prime numbers comprised within given limits*, Amer. J. Math (1881), no. 4, 230–247.
- [76] T. Tatzuza, *On the zeros of Dirichlet's L-functions*, Proc. Japan Acad. **26** (1950), no. 9, 1–13.

- [77] H. J. J. te Riele, *On the sign of the difference $\pi(x) - li(x)$* , Math. Comput. (1987), no. 48, 323–328.
- [78] G. Tenenbaum, *Introduction to analytic and probabilistic number theory*, Cambridge university press, 1995.
- [79] E. C. Titchmarsh, *On $\pi(x)$ and $\zeta(x)$* , Quart. J. Math., Oxford Ser. (1938), no. 9, 97–108.
- [80] Bronstein; u. a., *Taschenbuch der Mathematik*, Harri Deutsch-Verlag, 1997.
- [81] J. G. van der Corput, *Sur le reste dans la démonstration élémentaire du théorème des nombres premiers*, Centre Belge Rech. Math., Colloque Théorie des Nombres, Bruxelles 19–21 (1956), 163–182.
- [82] I. M. Vinogradov, *A new estimate of the function $\zeta(1 + it)$. (russian)*, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. mat (1958), no. 22, 161–164.
- [83] H. von Koch, *Sur la distribution des nombres premiers*, Acta Math. (1901), no. 24, 159–182.
- [84] A. Walfisz, *Weyl'sche Exponentialsummen in der neueren Zahlentheorie*, Berlin, 1963.
- [85] J. Van De Lune; H. J. J. Te Riele; D. T. Winter, *On the zeros of the Riemann zeta-function in the critical strip. iv.*, Math. Comput. (1986), no. 46, 667–681.
- [86] E. Wirsing, *Elementare Beweise des Primzahlsatzes mit Restglied, (i)*, J. Reine Angew. Math. (1962), no. 211, 205–214.
- [87] ———, *Elementare Beweise des Primzahlsatzes mit Restglied, (ii)*, J. Reine Angew. Math. (1964), no. 214/215, 1–18.

- [88] D. Wolke, *Eine Bemerkung zum Primzahlsatz*, Monatshefte für Mathematik (1985), no. 100, 337–339.

Namensverzeichnis

_____ A _____

Abel, Niels Henrik (1802–1829),
23

_____ B _____

Bays, Carter (??), 16

Bernoulli

—, Daniel (1700–1782), 10

—, Daniel (1700–1782); Jakob
(1654–1705), 10

—, Jakob (1654–1705), 10, 116

Bertrand, Joseph Louis Francois
(1822–1900), 7

Bohman, Jan (??), 100, 101

Bombieri, Enrico (1940–), 15, 18

Breusch, Robert (??), 15

Brun, Viggo (1885–1978), 18

Burckhardt, J. C. (??), 4, 5

_____ C _____

Caldwell, C. (??), 2

Cauchy, Augustin Louis (1789–
1857), 21, 25, 26, 44, 54

Chernac, L. (??), 4, 5, 7

Corput van der, Johannes Gualt-
herus (1890–1975), 15

_____ D _____

Deléglise, Marc (??), 101, 102

Diamond, H. G. (??), 15

Dirichlet, Gustav Peter Lejeune
(1805–1859), 11, 18, 29,
38, 39, 43, 112

Dubner, Harvey (??), 111

Dusumbetov, A. (??), 15

_____ E _____

Eratosthenes von Kyrene (275–
194 v. Chr.), 74, 75, 78

Erdős, Paul (1913–1996), 12, 13,
18, 109

Euklid, von Alexandria (etwa 365–
300 v. Chr.), 2, 3, 108

Euler, Leonhard (1707–1783), 2,
3, 10, 30, 34, 61, 89, 104,
108, 111, 114, 116

_____ F _____

Fourier, Jean Baptiste Joseph de
(1768–1830), 12, 43, 109

_____ G _____

Gauss, Carl Friedrich (1777–
1855), 4, 6, 7, 10, 18, 108,
111

Goldbach, Christian (1690–1764),
10

_____ H _____

Hadamard, Jacques Solomon
(1865–1963), 8, 10, 18,
108, 111

Hardy, Godfrey Harold (1877–
1947), 16, 18

Hudson, Richard H. (??), 16

————— I —————

Ikehara, Shikao (1904–1984), 12

Indlekofer, K. H. (1943–), 111

Ingham, Albert Edward (1900–),
43

————— J —————

Járai, A. (??), 111

————— K —————

Kaczorowski, J. (??), 17

Korobov, Nikolai Mikhailovich
(1917–), 11, 14, 37, 38

Kuhn, P. (??), 15

————— L —————

Lagarias, J. C. (??), 101, 102, 110

Lambert, Johann Heinrich (1728–
1777), 4, 7

Landau, Edmund (1877–1938), 1,
2, 18, 71, 114

Laurent, Pierre Alphonse (1813–
1854), 34, 54

Lavrik, Aleksandr Fedorovich
(1927–), 15

Legendre, Adrien Marie (1752–
1833), 4–7, 10, 19, 24, 75–
78, 84, 101, 102, 108–110,
114

Lehman, R. Sherman (1930–), 16

Lehmer, Derrick Henry (1905–
1991), 19, 78, 97, 98, 100–
102, 110

Leibniz, Gottfried Wilhelm (1646–
1716), 10

Levinson, Norman (1912–1975),
18

Linnik, Yurii Vladimirovich
(1915–1972), 18

Littlewood, John Edensor (1885–
1977), 13, 16, 18

————— M —————

Möbius, August Ferdinand (1790–
1868), 71, 72, 104, 116

Mangoldt, Hans von (1854–1925),
115

Mapes, David (??), 101, 102

Mascheroni, Lorenzo (1750–1800),
104

Meissel, E. D. F. (??), 19, 78, 84,
87, 91, 94, 100–102, 110

Mengoli, Pietro (1625–1686), 10

Mertens, Franz Carl Joseph
(1840–1927), 9, 24, 25

Miller, V. S. (??), 101, 102, 110

Mináč, J. (??), 74

_____ N _____

Newman, Donald Joseph (1930–),
12, 17, 19, 43, 108, 109

_____ O _____

Odlyzko, A. M. (??), 9, 101, 102,
110

_____ P _____

Perron, Oskar (1880–1975), 66, 69

Pintz, János (??), 5, 17

Potler, A. (??), 5

Pritchard, Paul (??), 75

_____ R _____

Richert, Hans-Egon (1924–), 11,
14, 37

Riemann, Georg Friedrich Bern-
hard (1826–1866), 8–10,
13, 14, 16–18, 28, 33, 108,
111, 112, 115

Rivat, Joel (??), 101, 102

Rosser, John Barkley (1907–), 37

_____ S _____

Schoenfeld, Lowell (1920–), 37

Selberg, Atle (1917–), 12, 13, 18,
109

Siegel, Carl Ludwig (1896–1981),
13, 18

Skewes, S. (??), 16

Sobirov, A. S. (??), 15

Steinig, J. (??), 15

Stirling, James (1692–1770), 10

Sylvester, James Joseph (1814–
1897), 8

_____ T _____

Tatuzawa, Tikao (??), 14

Taylor, Brook (1685–1731), 34

Te Riele, H. J. J. (??), 9, 16

Tschebyschew (Čebyšev), Pafnuti
Lwowitsch (1821–1894),
5, 7, 8, 12, 108, 116

Tschudakov, N. G. (??), 13

_____ V _____

Vallée Poussin, Charles De La
(1866–1962), 8, 10, 11, 13,
37, 108, 111

Van de Lune, J. (??), 9

Vega, Georg Freiherr von (1754?–
1802), 4, 5, 7

Vinogradov (auch Winogradow),
Iwan Matwejewitsch
(1891–1983), 11, 14, 18,
37, 38

Von Koch, Helge (1870–1924), 14

_____ W _____

- Walfisz, Arnold (1892–1962), 37
 Wallis, John (1616–1703), 10
 Weierstraß, Karl Theodor Wilhelm (1815–1897), 22
 Wiener, Norbert (1894–1964), 12
 Wilson, Sir John (1741–1793), 74
 Winter, D. T. (??), 9
 Wirsing, E.(1931–), 15
 Wolke, Dieter (1942–), 19, 65, 109

_____ Y _____

- Young, J. (??), 5

Stichwortverzeichnis**B**

Beweis

analytisch, 13, 43, 65

elementar, 14

E

elementaren Methoden, 13

F

Faltung, 39

Fortsetzung

analytisch, 28

G

Gamma-Funktion, 9

H

holomorph, 21

K

konvergent, 20

absolut, 20

gleichmäßig, 22

M

mermorph, 21

P

Primzahlsatz, 11

R

Residuensatz, 25

S

Sieb des ERATOSTHENES, 74

Z

Zetafunktion, 8, 9, 28